# *Universalidad de la computación cuántica geométrica*

## *Modelo del medio Kerr*

Andrés Sicard

(En conjunto con Mario Vélez)

Grupo de Lógica y Computación

Departamento de Ciencias Básicas

Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

# *Resumen*

El modelo del medio Kerr es un modelo de computación cuántica geométrica no abeliana. Se demuestra que éste es un modelo de computación cuántica universal a partir de la construcción de las compuertas de rotación de $1$ qubit $R_x(\alpha)$ y $R_y(\alpha)$ (universalidad $U(2)$) y de una compuerta no trivial $E$ de $2$-qubits (universalidad $U(k = 2^n)$). Para cada una de las compuertas mencionadas, se presenta explícitamente el operador de holonomía $\Gamma_A(\gamma)$ y el camino $\gamma$ sobre los cuales son construidas.

# *Universalidad para la CC*

**Teorema:** Sea $U$ cualquier operador unitario que opere sobre un $1$-qubit. Entonces existen números reales $\alpha, \beta, \gamma$ y $\delta$ tales que $U = e^{i\alpha} R_x(\beta) R_y(\gamma) R_x(\delta)$, donde $R_i(\alpha) = e^{-i\theta\Gamma_i/2}$ son las compuertas de rotación.

**Teorema:** Cualquier conjunto de compuertas cuánticas universales para $U(2)$ y la compuerta

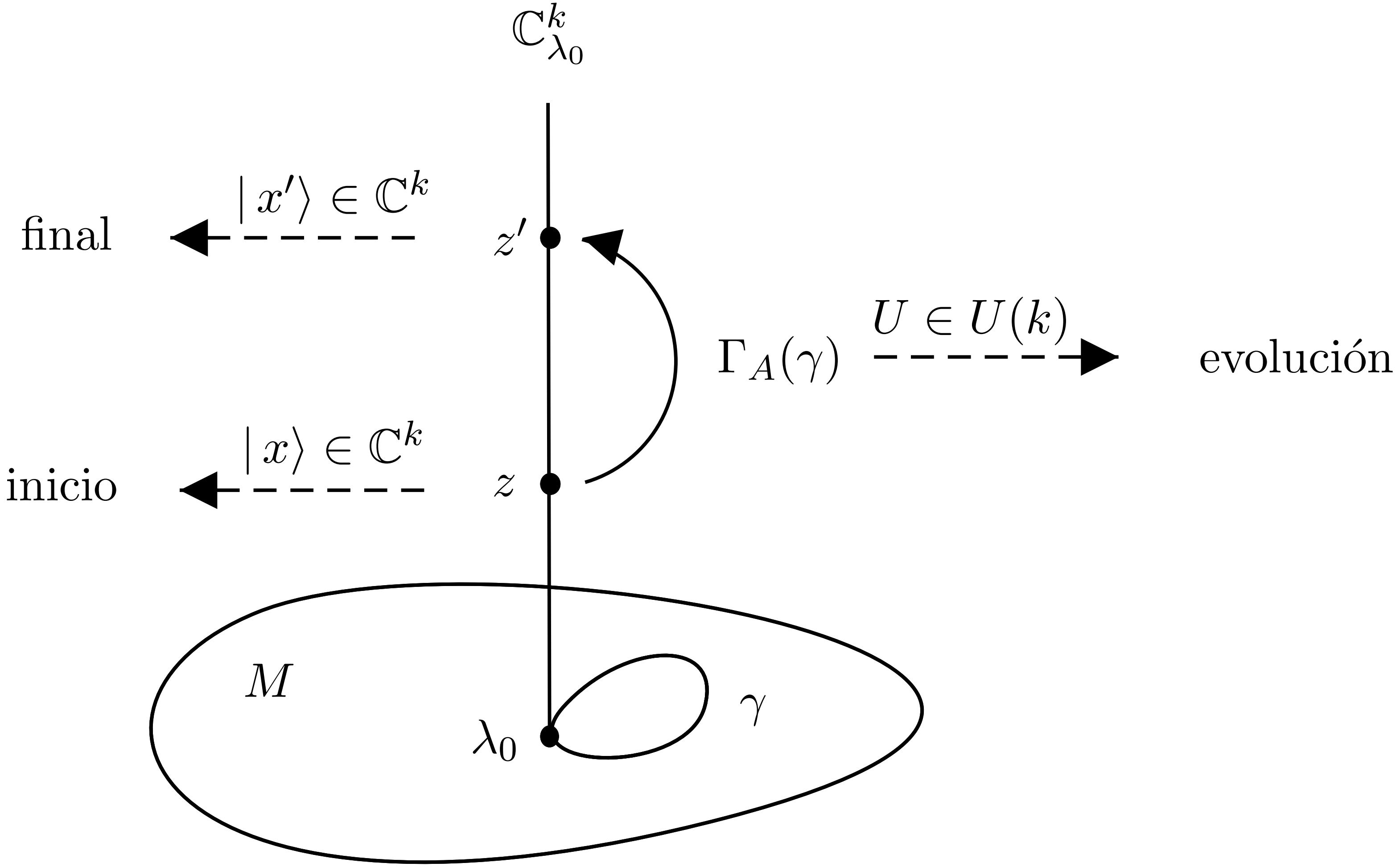
$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

de $U(4)$ son un conjunto de compuertas universales para $U(k = 2^n)$.

# Modelo matemático para la CCGNA

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\begin{array}{c}\text{Haz fibrado principal}\\ F_{CCG}\end{array} & & \begin{array}{c}\text{Haz fibrado vectorial}\\ V_{CCG}\end{array} \arrow[ll, "\text{haz fibrado asociado}"'] \\
\begin{array}{c}\text{Haz fibrado principal}\\ P^* F_{CCG}\end{array} \arrow[u, "\textit{pullback}"] \arrow[d, "\text{grupo de holonomía}"'] & \begin{array}{c}\text{Espacio de paramétros}\\ M\end{array} \arrow[l] \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{Haz fibrado vectorial}\\ P^* V_{CCG}\end{array} \arrow[u, "\textit{pullback}"'] \arrow[d, "\text{fibra típica}"] \\
\begin{array}{c}\text{Operadores de evolución}\\ Hol(A) \subseteq U(k{=}2^n)\end{array} & & \begin{array}{c}n\text{-qubits}\\ |\,x\rangle \in \mathbb{C}^{k=2^n}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

# Computación sobre la CCGNA



# *Medio Kerr: 1-qubit*

Hamiltoniano: $H_0 = Xn(n-1)$

Componentes de la conexión:

$$A_x = \begin{pmatrix} -iy & -\left(\cosh r_1 - e^{-i\theta_1}\operatorname{senh} r_1\right) \\ \cosh r_1 - e^{i\theta_1}\operatorname{senh} r_1 & -iy \end{pmatrix},$$

$$A_y = i\begin{pmatrix} x & \cosh r_1 + e^{-i\theta_1} r_1 \operatorname{senh} r_1 \\ \cosh r_1 + e^{i\theta_1} r_1 \operatorname{senh} r_1 & x \end{pmatrix},$$

$$A_{r_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{\theta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{i}{4}\operatorname{senh}^2 r_1 .$$

# *Universalidad* $U(2)$

Operador de holonomía:

$\Gamma_A(\gamma) = \mathcal{P}\exp\left(-\oint_\gamma \sum_i A_i di\right)$ para $i \in \{x, y, r_1, \theta_1\}$

Ciclo para la compuertas $R_y(\alpha)$ y $R_x(\alpha)$:

$\gamma_{R_y}(\alpha) = \gamma_{R_y}(\alpha)$: $(0,0) \longrightarrow (0,b) \longrightarrow (1,b) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (0,0)$

Compuertas $R_y(\alpha)$ y $R_x(\alpha)$

$$\Gamma_A(\gamma_{R_y}(\alpha)) = \exp\left(-\oint_{\gamma_{R_y}(\alpha)} A_x\, dx + A_{r_1}\, dr_1\right)$$

$$\Gamma_A(\gamma_{R_x}(\alpha)) = \exp\left(-\oint_{\gamma_{R_x}(\alpha)} A_y\, dy + A_{r_1}\, dr_1\right)$$

# *Medio Kerr: $2$-qubit*

Hamiltoniano: $H_0 = X n_1(n_1 - 1) + X n_2(n_2 - 1)$
Componentes de la conexión:

$$A_{r_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -e^{-i\theta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\theta_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\theta_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\theta_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{i}{2} \operatorname{senh} 2r_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{i}{2} (\cosh 2r_2 - 1),$$

# *Medio Kerr: 2-qubit (cont.)*

$$A_{r_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-i\theta_3} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2\cosh^2 r_2 - 1),$$

$$A_{\theta_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta_3} & 0 \\ 0 & e^{i\theta 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{i}{2} \cosh 2r_2 \operatorname{sen} 2r_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} i \operatorname{sen}^2 r_3 .$$

# *Universalidad* $U(k = 2^n)$

Operador de holonomía:

$\Gamma_A(\gamma) = \mathcal{P}\exp\left(-\oint_\gamma \sum_i A_i di\right)$ para $i \in \{r_2, r_3, \theta_2, \theta_3\}$

Ciclo para la compuerta $E$:

$\gamma_E(b)$: $(3\pi/2, 0, 0) \longrightarrow (3\pi/2, b, 0) \longrightarrow (3\pi/2, b, 1) \longrightarrow (3\pi/2, 0, 1) \longrightarrow (3\pi/2, 0, 0)$

Compuerta $E$:

$$\Gamma_A(\gamma_E(b)) = \exp\left(-\oint_{\gamma_E(b)} A_{r_2}\, dr_2 + A_{r_3}\, dr_3\right) =$$

# *Universalidad* $U(k=2^n)$ *(cont.)*

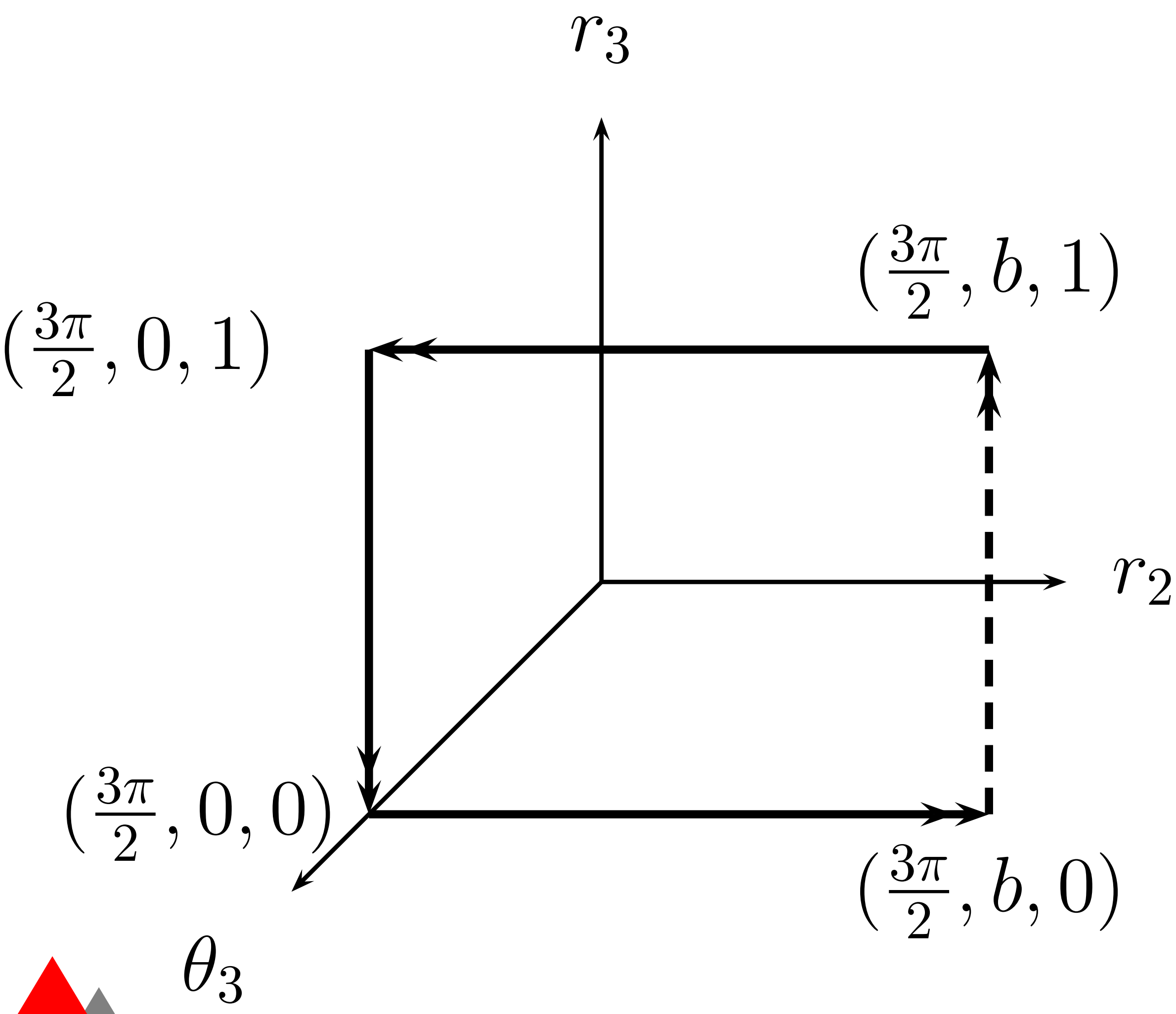
$$= \exp\Bigg[-\Bigg(\int_0^b \left(A_{r_2}|_{r3=0,\theta_3=3\pi/2}\right) dr_2 + \int_0^1 \left(A_{r_3}|_{r_2=b,\theta_3=3\pi/2}\right) dr_2$$

$$+ \int_b^0 \left(A_{r_2}|_{r_3=1,\theta_3=3\pi/2}\right) dr_2 + \int_1^0 \left(A_{r_3}|_{r_2=0,\theta_3=3\pi/2}\right) dr_3\Bigg)\Bigg]$$

$$= \exp\left[-(2\cosh^2(b)-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= E, \quad \text{cuando } b = \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4+\pi}{2}}\right).$$

# Universalidad $U(k = 2^n)$ (cont.)



# Conclusiones

En el contexto de la CCGNA, uno de los modelos que presenta características de universalidad, es el modelo del medio Kerr, el cual se obtiene a partir de un Hamiltoniano degenerado en el valor de energía $E = 0$.

En particular, la universalidad $U(2)$ del modelo del medio Kerr se obtiene al construir las compuertas de rotación $R_x(\alpha)$ y $R_y(\alpha)$ que actúan sobre un $1$-qubit, y la universalidad $U(k = 2^n)$ del modelo se obtiene con las compuertas anteriores y la construcción de una compuerta "no trivial" $E$ que actúa sobre un $2$-qubit.

# *Agradecimientos y contacto*

Agradecimientos:

Este trabajo hace parte del proyecto de investigación *Computación Cuántica Geométrica No Abeliana* $N_0. py0117$, financiado por la universidad EAFIT.

Contacto:

Andrés Sicard

*email*: `asicard@eafit.edu.co`

página *web*: `sigma.eafit.edu.co:90/~asicard/personal`