## ¿QUÉ ES UNA LÓGICA?: DE LAS LÓGICAS NO CLÁSICAS HACIA LA LÓGICA UNIVERSAL

Andrés Sicard

Grupo Lógica y Computación
Departamento de Ciencias Básicas
Escuela de Ciencias y Humanidades
Universidad EAFIT, Medellín, Colombia



## Debilitamientos tipo I

### Principios (propiedades) de la lógica clásica

**Notación**

- $For$: Conjunto de fórmulas
- $\alpha, \beta, \delta, \ldots$: Fórmulas
- $\Delta, \Gamma, \ldots, \subseteq For$: Teorías (conjunto de fórmulas)
- $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$: Conectivos lógicos
- $\vdash, \models, \Vdash$: Relación de consecuencia

**I.1. Principio de bivalencia** (semántica $\models_{LC}$ es bi-valuada)

Debilitamiento: **lógicas polivalentes** [19]

Valores de verdad $\begin{cases} \boxed{\text{designado}} \\ \boxed{\text{antidesignado}} \\ \text{designado y antidesignado} \\ \text{ni designado ni antidesignado} \\ \text{no designado} \\ \text{no antidesignado} \end{cases}$

Espacio semántico $\begin{cases} \text{Elemento mínimo } 0 \text{ antidesignado y no designado} \\ \text{Elemento máximo } 1 \text{ designado y no antidesignado} \\ \leq\text{: relación de orden parcial} \\ \forall A \ (0 \leq /A/ \leq 1) \end{cases}$



**Ejemplo (Lógica $K_3$ de Kleene [12]).**

Espacio semántico $\begin{cases} 1\text{: Verdadero} \\ \frac{1}{2}\text{: Indefinido o desconocido} \\ 0\text{: Falso} \end{cases}$

Valores designados: $\{1\}$. Valores antidesignados: $\{\frac{1}{2}, 0\}$

| | $\neg$ |
|---|---|
| $\mathbf{1}$ | $0$ |
| $\mathbf{\frac{1}{2}}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{0}$ | $1$ |

| $\wedge$ | $\mathbf{1}$ | $\mathbf{\frac{1}{2}}$ | $\mathbf{0}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\mathbf{\frac{1}{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\mathbf{0}$ | $0$ | $0$ | $0$ |

| $\vee$ | $\mathbf{1}$ | $\mathbf{\frac{1}{2}}$ | $\mathbf{0}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $\mathbf{\frac{1}{2}}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{0}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

| $\rightarrow$ | $\mathbf{1}$ | $\mathbf{\frac{1}{2}}$ | $\mathbf{0}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\mathbf{\frac{1}{2}}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{0}$ | $1$ | $1$ | $1$ |

Característica: No existe $\alpha$ tal que $\models_{K_3} \alpha$.

**I.2. Principio de explosión o principio de pseudo-Scotus o *ex contradictione sequitur quod libet*** ($\forall\Gamma\ \forall\alpha\ \forall\beta\ (\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)$)

Rechazo: **lógicas paraconsistentes** [2, 10] ($\exists\Gamma\ \exists\alpha\ \exists\beta\ (\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nVdash \beta)$)

**Ejemplo (Lógica $C_1$ de da Costa [16]).**
Semántica bivaluada para $C_1$: Una valuación para $C_1$ es una función $v$: $FOR(C_1) \to \{0, 1\}$ tal que:

$v1$. $v(\alpha \wedge \beta) = 1$, si y sólo si, $v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 1$.

$v2$. $v(\alpha \vee \beta) = 1$, si y sólo si, $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$.

$v3$. $v(\alpha \to \beta) = 1$, si y sólo si, $v(\alpha) = 0$ ó $v(\beta) = 1$.

$\vdots$

$v7$. Si $v(\alpha) = 0$, entonces $v(\neg\alpha) = 1$.

Consecuencia: La semántica para $C_1$ no es **veritativo-funcional** puesto que de $v(\alpha) = 1$ no se puede concluir que $v(\neg\alpha) = 1$ ni que $v(\neg\beta) = 0$.



**Ejemplo (Lógica $C_1$ de da Costa [11] (sintáxis)).**
$\underbrace{\alpha^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)}_{\text{(buen comportamiento)}}$

A1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

A2. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$

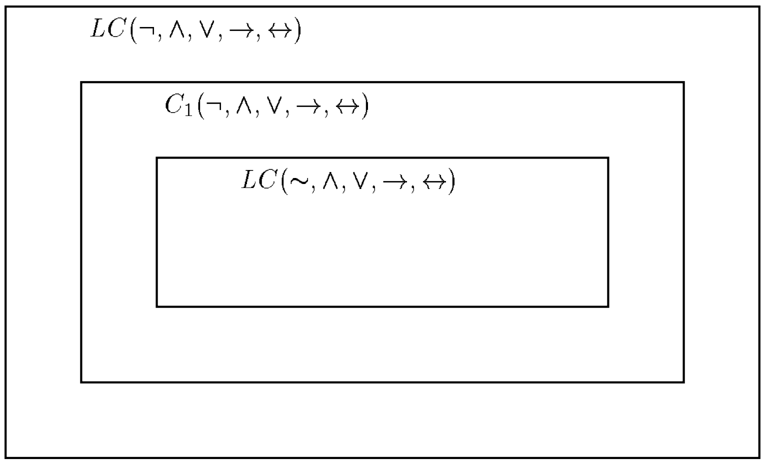
$\vdots$

A11. $\beta^\circ \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$

A12. $(\alpha^\circ \wedge \beta^\circ) \to ((\alpha \wedge \beta)^\circ \wedge (\alpha \vee \beta)^\circ \wedge (\alpha \to \beta)^\circ)$

R1. $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

Característica: La lógica $C_1$ admite una negación fuerte $\sim\alpha \stackrel{\mathsf{def}}{=} \neg\alpha \wedge \alpha^{\circ}$ que tiene todas las propiedades de la negación clásica.




¿Qué es una lógica? Nr. 7

## I.3. "Estabilidad" de los conectivos lógicos

- Rechazo
  - Reducción
    - Lógicas posivitas [18]
    - Lógicas implicativas [18]
    - ⋮
  - Expansión
    - Lógicas modales [14, 24]
      - $\boxed{\Box\text{: operador de necesidad}}$
      - $\boxed{\Diamond\text{: operador de posibilidad}}$
      - Lógicas temporales
      - Lógicas epistémicas
      - Lógicas deónticas
      - ⋮
    - ⋮

¿Qué es una lógica? Nr. 8

## Debilitamientos tipo II

### Relación de consecuencia

**Definición** Una lógica $\mathfrak{L}$ es una estructura $\mathfrak{L} =< For, \Vdash >$ donde la relación de consecuencia $\Vdash \subseteq P(For) \times For$ satisface la siguientes propiedades [5, 10]:

1. Reflexividad: Si $\alpha \in \Gamma$, entonces $\Gamma \Vdash \alpha$.
2. Monotonía: Si $\Gamma \Vdash \alpha$ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\Delta \Vdash \alpha$.
3. Transitividad: Si $\Gamma \Vdash \alpha$ y $\Delta, \alpha \Vdash \beta$, entonces $\Gamma, \Delta \Vdash \beta$.



**Rechazo a las propiedades anteriores:**

**II.1 No reflexividad**

**Ejemplo (Lógicas alfabares ($\alpha \nVdash \alpha$) [15]).**
Sea $\mathfrak{L} =< For, \Vdash >$ una lógica tal que $\Gamma \Vdash \alpha$ ssi $\exists \Gamma'$ ($\Gamma' \subseteq \Gamma$ y $\Gamma'$ es consistente *y* $\Gamma' \vdash_{LC} \alpha$). Entonces $\{p \wedge \neg p\} \nVdash p \wedge \neg p$, por lo tanto, $\alpha \nVdash \alpha$, para algún $\alpha \in FOR$.

**II.2 No monotonía (lògicas no monótonas [1])**

**II.3 No transitividad (???)**

## Debilitamientos tipo III

### Estructura de la lógica

**Definición** Una lógica $\mathfrak{L}$ es una estructura $\mathfrak{L} =< For, \Vdash>$ donde la relación de consecuencia está definida por $\Vdash \subseteq P(For) \times For$.

**Debilitamientos:**
**III.1 Múltiples consecuencias ($\Vdash \subseteq P(For) \times P(For)$)**
**III.2. Lògicas subestructurales [20]**

- Multiconjunto $\neq$ conjunto $(\{A, A, B\} \neq \{A, B\})$, entonces $\alpha, \alpha, \beta \Vdash \gamma$ no implica que $\alpha, \beta \Vdash \gamma$.
- $\alpha, \beta \Vdash \gamma$ no implica que $\beta, \alpha \Vdash \gamma$
- En general, una teoría $\Gamma$ no necesariamente tiene la estructura de un conjunto.



## Hacia una lógica universal (Jean-Yves Béziau [6])

1. Relaciones entre: semántica ($\models$), sintáxis ($\vdash$) y álgebra.
2. Presentaciones alternativas de la relación de consecuencia $\Vdash$ (ej. inferencia visual).
3. Criterios de "equivalencia" entre diferentes "presentaciones" de una misma lógica [8].
4. Criterios de "equivalencia" entre diferentes lógicas (ej. semántica de translaciones posibles [16]).
5. Propiedades minimales de los conectivos y compatibilidad entre los mismos (ej. ¿qué es una negación (paraconsistente)? [5, 7]).
6. Extensiones a lógicas de orden superior.
7. ...

## Posibles aplicaciones

- Construcción de teorías matemáticas [17].
- *"Or maybe paraconsistent logic will save us from the tricephalous CGC-monster (CGC for Cantor-Gödel-Church) by providing foundations for finite decidable complete mathematics"* [4, pág. 16].
- Hipercomputación [23, 21].



## Conclusiones

- Principio de tolerancia en matemáticas (Newton da Costa, 1958):

> "Desde el punto de vista sintáctico-semántico, toda teoría es admisible, desde que no sea trivial. En sentido amplio, existe, en matemática, lo que no sea trivial" gv [2, pág. 180].

- Pluralismo lógico [3].
- ¿Una nueva crisis?

## Agradecimientos y contacto

Agradecimientos:
Este trabajo fue realizado en el contexto de la especialización en "Lógica y Filosofía" de la Universidad EAFIT.

Contacto:
Andrés Sicard
Universidad EAFIT
*email*: `asicard@eafit.edu.co`
página *web*: `sigma.eafit.edu.co/~asicard/personal`

# Bibliografía

[1] ALDO ANTONELLI. Non-monotonic logic. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Eprint: `plato.stanford.edu/entries/logic-nonmonotonic/` [01-Jul-2002] (2001).

[2] M. ANDRÉS BOBENRIETH. "¿Inconsistencias, por qué no?" Santafé de Bogotá: Tercer Mundo Editores, División Gráfica (1996).

[3] OTÁVIO BUENO. Can a paraconsistent theorist be a logical monist? *En: [9]* páginas 535–552 (2002).

[4] JEAN-YVES BÉZIAU. The future of paraconsistent logic. *Logical Studies* **2** (1999). Eprint: `www.logic.ru/LogStud/02/No2-01.html`.

[5] JEAN-YVES BÉZIAU. What is paraconsistent logic? *En: [13]* páginas 95–111 (2000).

[6] JEAN-YVES BÉZIAU. From paraconsistent logic to universal logic. *SORITES (Electronic Magazine of Analytical Philosophy)* **12**, 5–32 (may 2001). Eprint: `www.sorites.org/Issue_12/index.htm`.

[7] JEAN-YVES BÉZIAU. Are paraconsistents negations negations? *En: [9]* páginas 465–486 (2002).

[8] JEAN-YVES BÉZIAU, RENATA P. DE FREITAS Y JORGE P. VIANA. What is classical propositional logic? (A study in universal logic). *Logical Studies* **7** (2001). Eprint: `www.logic.ru/LogStud/07/No7-02.html`.

[9] WALTER A. CARNIELLI, MARCELLO E. CONIGLIO Y ITALA M. L. D'OTTAVIANO, editores. "Paraconsistency. The logical way to the inconsistent". New York: Marcel Dekker (2002).

[10] WALTER A. CARNIELLI Y JOÃO MARCOS. A taxonomy of C-systems. *En: [9]* páginas 1–94 (2002). Eprint: `ftp://logica.cle.unicamp.br/pub/e-prints/Taxonomy.pdf`.

[11] NEWTON C. A. DA COSTA Y RENATO A. LEWIN. Lógica paraconsistente. En "Encliclopedia IberoAmericana de Filosofía", tomo 7: Lógica, páginas 185–204. Madrid: Editorial Trotta, S.A. (1995).

[12] RICHARD L. EPSTEIN. "The Semantic Foundations of Logic: Propositional Logics". London: Kluwer Academic Publishers (1990).

[13] DIDERIK BATENS ET AL., editor. "Frontiers of paraconsistent logic". Hertfordshire, England: Research Studies Press LTD. (2000).

[14] G. E. HUGHES Y M. J. CRESSIVELL. "Introducción a la lógica modal". Colección: Estructura y Función. Madrid: Editorial Tecnos (1973).

[15] DÉCIO KRAUSE Y JEAN-YVES BÉZIAU. Relativizations of the principle of identity. *Logic Journal of the IGPL* **5**(3), 327–338 (1997). Eprint: `www3.oup.co.uk/igpl/contents/`.

[16] JOÃO MARCOS. Semânticas de Traduções Possíveis. Tesis de Maestría, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (1999).

[17] Chris Mortensen. “Inconsistent mathematics”. London: Klumer Academic Publishers (1995).

[18] Helena Rasiowa. “An algebraic aprroach to non-classical logics”, tomo 78 de “Studies in Logic and the Foundations of Mathematics”. Amsterdan: North-Holland Publishing Company (1974).

[19] Nicholas Rescher. “Many-valued logic”. New York: McGraw-Hill (1969).

[20] Greg Restall. Substructural logics. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Eprint: `plato.stanford.edu/entries/logic-substructural/` [01-Jul-2002] (2002).

[21] Andrés Sicard. Hipercomputación: la próxima generación de la computación teórica. Encuentro Grupos de investigación, ERM (Escuela Regional de Matemáticas), Universidad del Cauca, Popayán, Septiembre 11 al 15. En: Informe de investigación [22]. Eprint y slides: `sigma.eafit.edu.co/~asicard/archivos/hipercomputacion.tar.gz` (2000).

[22] Andrés Sicard y Mario Vélez. Prototipo de un modelo de computación cuántica continua. Informe técnico, Universidad EAFIT (2000). Eprint: `sigma.eafit.edu.co/~asicard/archivos/proyectoCCC.tar.gz`.

[23] Andrés Sicard y Mario Vélez. Hipercomputación: la próxima generación de la computación teórica. *Revista Universidad EAFIT* **123**, 47–51 (2001). En: Informe de investigación [22]. Eprint: `sigma.eafit.edu.co/~asicard/archivos/hipercomputacion.pdf.gz`.

[24] Manuel Sierra. “Inferencia visual para lógicas normales”. Medellín: Fondo editorial Universidad EAFIT (2002).