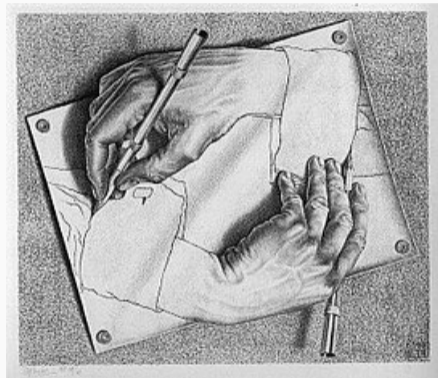


Limitaciones de la autorreferencia

Andrés Sicard Ramírez
Universidad EAFIT

Maestría en Matemáticas Aplicadas - 50 años
Universidad EAFIT
25 de octubre de 2023

Introducción



M. C. Escher. Manos dibujando. 1948.

- (i) Lawvere [1963]. «Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories».
- (ii) Yanofsky [2003]. «A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points».

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

- (i) $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}\mathbb{N}$ (el conjunto de los números reales y el conjunto de partes de los números naturales son equipotentes).

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

- (i) $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}\mathbb{N}$ (el conjunto de los números reales y el conjunto de partes de los números naturales son equipotentes).
- (ii) No existe una función sobreyectiva

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{N}.$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

- (iii) Sea $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ un conjunto de posibles «valores de verdad» y sea A un conjunto. La función característica de A está definida por:

$$\chi_A : A \rightarrow \mathbf{2}$$
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A; \\ 1, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

- (iv) $\mathcal{P}\mathbb{N} \cong 2^{\mathbb{N}}$ (el conjunto de partes de los números naturales y el conjunto de las funciones características sobre los números naturales son equipotentes).

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

- (iv) $\mathcal{P}\mathbb{N} \cong 2^{\mathbb{N}}$ (el conjunto de partes de los números naturales y el conjunto de las funciones características sobre los números naturales son equipotentes).
- (v) No existe una función sobreyectiva

$$\mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}.$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(vi) Sea $\mathbf{1} = \{0\}$, $\mathbf{3} = \{0, 1, 2\}$ y $\mathbf{42} = \{0, 1, \dots, 41\}$.

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(vi) Sea $\mathbf{1} = \{0\}$, $\mathbf{3} = \{0, 1, 2\}$ y $\mathbf{42} = \{0, 1, \dots, 41\}$.

(vii) Sea T un conjunto. No existen funciones sobreyectivas

$$T \rightarrow \mathbf{2}^T,$$

$$T \rightarrow \mathbf{3}^T,$$

$$T \rightarrow \mathbf{42}^T,$$

pero si existe una función sobreyectiva

$$T \rightarrow \mathbf{1}^T.$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

- (vii) Un conjunto Y es «no degenerado» o «no trivial» si sus elementos pueden ser intercambiados, es decir, existe una función de Y en Y sin puntos fijos

$$\alpha : Y \rightarrow Y$$

$$\alpha(y) \neq y, \text{ para todo } y \in Y.$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

- (vii) Un conjunto Y es «no degenerado» o «no trivial» si sus elementos pueden ser intercambiados, es decir, existe una función de Y en Y sin puntos fijos

$$\alpha: Y \rightarrow Y$$

$$\alpha(y) \neq y, \text{ para todo } y \in Y.$$

- (viii) Sea T un conjunto y sea Y un conjunto no degenerado. No existe una función sobreyectiva

$$T \rightarrow Y^T.$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(ix) (Des)currificar. Una función de orden superior

$$\hat{f} : T \rightarrow Y^T = T \rightarrow (T \rightarrow Y) \quad (\text{función currificada}),$$

puede expresarse como una función de primer orden

$$f : T \times T \rightarrow Y \quad (\text{función no currificada})$$

donde

$$\begin{aligned} f(-, t') &= \hat{f}(t') : T \rightarrow Y, \\ f(t, t') &= \hat{f}(t')(t) : Y \end{aligned}$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(x) Sean $f : T \times T \rightarrow Y$, $g : T \rightarrow Y$ y $t \in T$. La función g es «representable por t » si

$$g(-) = f(-, t).$$

Hacia una generalización del teorema de la diagonalización de Cantor

(xi) Si $\hat{f} : T \rightarrow Y^T$ es una función no sobreyectiva entonces existe una función $g : T \rightarrow Y$ no representable. Es decir, para todo $t' \in T$, existe $t \in T$, tal que

$$g(t) \neq f(t, t') = \hat{f}(t')(t).$$

Teorema de Cantor

Teorema de Cantor

Teorema de Cantor

Si Y es un conjunto y existe una función $\alpha : Y \rightarrow Y$ sin un punto fijo, entonces para todos los conjuntos T y todas las funciones $f : T \times T \rightarrow Y$ existe una función $g : T \rightarrow Y$ que no es representable por f , es decir,

$$g(-) \neq f(-, t), \text{ para todo } t \in T.$$

Teorema de Cantor

Demostración.

Sea Y un conjunto y sea $\alpha : Y \rightarrow Y$ una función sin un punto fijo. Existe una función $\Delta : T \rightarrow T \times T := t \mapsto (t, t)$. La función $g : T \rightarrow Y$ se obtiene por la composición de tres funciones.

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \xrightarrow{f} & Y \\ \Delta \uparrow & & \downarrow \alpha \\ T & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

$$g := \alpha \circ f \circ \Delta$$
$$g(t) = \alpha(f(t, t)).$$

La función g no es representable por f , de lo contrario, para algún $t \in T$

$$f(t, t) = g(t) = \alpha(f(t, t)),$$

lo cual sería una contradicción porque $f(t, t)$ sería un punto fijo de α .

Teorema de Cantor

Si Y es un conjunto y existe una función $\alpha : Y \rightarrow Y$ sin un punto fijo, entonces para todos los conjuntos T y todas las funciones $f : T \times T \rightarrow Y$ existe una función $g : T \rightarrow Y$ que no es representable por f , es decir, $g(-) \neq f(-, t)$, para todo $t \in T$.

Limitaciones de la autorreferencia

«On a philosophical level, this generalized Cantor's theorem says that as long as the truth-values or properties of T are non-trivial, there is no way that a set T of things can “talk about” or “describe” their own truthfulness or their own properties. In other words, there must be a limitation in the way that T deals with its own properties.» [Yanofsky 2003, págs. 363–4]

Instancias del teorema de Cantor

(i) El teorema de la diagonalización de Cantor

No existe una función sobreyectiva de \mathbb{N} a $\mathcal{P}\mathbb{N}$, es decir $\mathbb{N} \not\cong \mathcal{P}\mathbb{N}$.

- (i) El teorema de la diagonalización de Cantor

No existe una función sobreyectiva de \mathbb{N} a $\mathcal{P}\mathbb{N}$, es decir $\mathbb{N} \not\cong \mathcal{P}\mathbb{N}$.

- (ii) La paradoja de Russell

El conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, es y no es un miembro de sí mismo.

(iii) La paradoja de Grelling

Un adjetivo es heterológico si no se describe a sí mismo. Por ejemplo, «largo» y «monosilábico» son adjetivos heterológicos.

El adjetivo «heterológico» es y no es heterológico.

(iii) La paradoja de Grelling

Un adjetivo es heterológico si no se describe a sí mismo. Por ejemplo, «largo» y «monosilábico» son adjetivos heterológicos.

El adjetivo «heterológico» es y no es heterológico.

(iv) Un lenguaje no recursivamente (computablemente) enumerable.

Existe un lenguaje que no es aceptado por ninguna máquina de Turing.

(iii) La paradoja de Grelling

Un adjetivo es heterológico si no se describe a sí mismo. Por ejemplo, «largo» y «monosilábico» son adjetivos heterológicos.

El adjetivo «heterológico» es y no es heterológico.



(iv) Un lenguaje no recursivamente (computablemente) enumerable.

Existe un lenguaje que no es aceptado por ninguna máquina de Turing.

(v) Otras instancias

Véase [Lawvere 1963; Yanofsky 2003].

Referencias

-  Lawvere, F. William (1963). **Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories.** En: Category Theory, Homology Theory and their Applications II. Ed. por Hilton, Peter. Vol. 92. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, págs. 134-145. DOI: [10.1007/BFb0080769](https://doi.org/10.1007/BFb0080769).
-  Yanofsky, Noson S. (2003). **A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points.** The Bulletin of Symbolic Logic 19.3, págs. 362-386. DOI: [10.2178/bsl/1058448677](https://doi.org/10.2178/bsl/1058448677).

¡Gracias!