REVISTA COLOMBIANA DE FÍSICA, VOL.35, No.2, 2003

# COMPUTACIÓN CUÁNTICA GEOMÉTRICA: MODELO DE TRES ESTADOS

Mario Vélez[1], Andrés Sicard[2]
Grupo de Lógica y Computación, Departamento de Ciencias Básicas
Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

**RESUMEN**

Se construye las componentes de la conexión y las componentes de la curvatura de un haz fibrado principal asociado a un modelo de computación cuántica geométrica proveniente de un hamiltoniano que representa un sistema cuántico de tres estados.

**ABSTRACT**

Connection and curvature components of a principal fiber bundle are constructed, associated to a geometric quantum computation model arising from a hamiltonian that represents a three-state quantum system.

**PACS:** 03,65.-w, 03,67.Lx, 03,65.Bz, Computación cuántica geométrica, conexión, curvatura.

## Introducción

La computación cuántica geométrica se nutre de los efectos inherentes a las propiedades geométricas de los espacios en los que se formulan algunos procesos de la mecánica cuántica.

El modelo de computación cuántica, que aquí se presenta, ha sido propuesto inicialmente por Antti O. Niskanen, Mikio Nakahara, y Martti M. Salomaa [1], como otra realización del modelo desarrollado originalmente por Paolo Zanardi y Mario Rasetti [2].

En la sección se describe el esquema general del modelo. En la sección se dan los elementos asociados a la descripción formal del modelo, la cual está basada en la noción de haz fibrado principal. En la sección se presenta, de forma detallada, la construcción de las componentes de la conexión asociada al fibrado principal. En la sección se construyen las componentes de la curvatura provenientes de la componentes de la conexión que conmutan entre sí.

## Modelo de 3 estados: caso 1-qubit

Para la construcción del modelo de 1-qubit se define el hamiltoniano $H_0$

$$H_0 = \epsilon \,|\,2\rangle\langle 2\,| = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde $|\,2\rangle = (1 \quad 0 \quad 0)^T$. $H_0$ presenta una degeneración de orden 2 para el autovalor de energía $E = 0$ y un autovalor $\epsilon$ diferente de cero del cual deriva un estado no degenerado.

En la matriz que define $H_0$ los autovectores asociados al autovalor de energía $E = 0$ son los qubits $|\,0\rangle$, $|\,1\rangle$.

[1]mvlez@eafit.edu.co
[2]asicard@eafit.edu.co

En éste caso la transformación isoespectral que deja invariante el subespacio de estados degenerados está dada por

$$H(\lambda_k,\mu_k) = g(\lambda_k,\mu_k)H_0 g^{\dagger}(\lambda_k,\mu_k), \tag{2}$$

donde $g(\lambda_k,\mu_k) \in SU(3)$ y $k \in \{1,2,3\}$. Cualquier matriz de $SU(n)$ puede ser descompuesta en una secuencia de $n(n-1)/2$ matrices elementales $SU(2)$, estas matrices actúan no trivialmente sobre dos filas de la matriz $n \times n$. El mecanismo anterior es llamado la descomposición de Givens [2,3].Para una matriz unitaria de $SU(3)$ se tiene

$$g(\lambda_k,\mu_k) = \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\mu}_1 & \bar{\lambda}_1 & 0 \\ -\bar{\lambda}_1 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{g_1} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\mu}_2 & 0 & \bar{\lambda}_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\bar{\lambda}_2 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}}_{g_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_3 & \bar{\lambda}_3 \\ 0 & -\bar{\lambda}_3 & \mu_3 \end{pmatrix}}_{g_3}, \tag{3}$$

donde $\lambda_k = e^{i\phi_k}\operatorname{sen}\theta_k,\ \mu_k = e^{i\psi_k}\cos\theta_k$. Como el conmutador $[H_0, g_3] = 0$, la matriz de evolución unitaria $g \in SU(3)$ está dada en función de los parámetros que se originan en virtud de la descomposición de Givens en factores de $SU(2)$ por

$$g(\lambda_i,\mu_i) = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 & \bar{\lambda}_1 & \bar{\mu}_1\bar{\lambda}_2 \\ -\lambda_1\bar{\mu}_2 & \mu_1 & -\lambda_1\bar{\lambda}_2 \\ -\lambda_2 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

donde $\lambda_i, \mu_i$ con $i \in \{1,2\}$ son los parámetros de control que definen el espacio paramétrico $M$.

# El fibrado

Utilizando la notación definida en [4,5] para los haces fibrados involucrados, se encuentra que el modelo de tres estados se construye formalmente a partir del haz fibrado principal

$$F_{CCG} = \{St(2,3), \pi_1, Gr(2,3), U(2)\}, \tag{5}$$

donde la variedad de Stiefel $St(2,3)$ es el espacio total, la variedad de Grassmann $Gr(2,3)$ es el espacio base, $U(2)$ es la fibra típica y $\pi$ es la proyección.

A partir del haz fibrado principal $F_{CCG}$ y el *pullback* $P^*St(k,N)$, construido mediante la parametrización de $F_{CCG}$ dada por $P$: $M \to Gr(2,3)$, es posible obtener un nuevo haz fibrado principal $P^*F_{CCG}$ denominado el *pullback* de $F_{CCG}$ debido a $P$, dado por

$$\begin{aligned} P^*F_{CCG} &= P^*\{St(2,3), \pi_1, Gr(2,3), U(3)\} \\ &= \{P^*St(2,3), \pi_3, M, U(3)\}, \end{aligned} \tag{6}$$

donde $P^*St(2,3)$ es el espacio total, $M$ es el espacio base, $U(3)$ es la fibra típica y $\pi_3$ es la proyección.

# Conexión

La estructura topológica de la construcción geométrica que se deriva a través de los subespacios bidimensionales formados por los autoestados degenerados del hamiltoniano paramétrico $H$ (ec. 2), permite definir en el fibrado principal (e.c

6) una conexión $A$ no abeliana. La conexión (campo *gauge*) $A$ de la estructura topológica es antihermítica $A = -A^\dagger$ y está definida por

$$A = A_{\lambda_i} d\lambda_i + A_{\mu_i} d\mu_i - A^\dagger_{\bar{\lambda}_i} d\bar{\lambda}_i - A^\dagger_{\bar{\mu}_i} d\bar{\mu}_i \qquad \text{donde } i \in \{1, 2\}. \tag{7}$$

Las componentes de la conexión $A$ se calculan mediante la expresión

$$A^{\alpha\beta}_{\sigma_i} = \langle \alpha \,|\, g^\dagger \frac{\partial}{\partial \sigma_i} g \,|\, \beta \rangle \,, \tag{8}$$

donde $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ rotúlan los estados degenerados del Hamiltoniano $H_0$ (ec. 1) y $\sigma_i \in \{\lambda_i, \mu_i\}$ pertenece al espacio de parámetros de control $M$.

Las componentes $A_{\lambda_1}$ y $A_{\lambda_2}$ de la conexión definida en (7) están dadas por

$$A_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \dfrac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial \lambda_2} + \bar{\mu}_2 \dfrac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_2} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

$$A_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \dfrac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial \lambda_1} + \bar{\mu}_1 \dfrac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_1} & \bar{\lambda}_2 \left( \lambda_1 \dfrac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \lambda_1} - \bar{\mu}_1 \right) \\ \lambda_2 \left( \mu_1 \dfrac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial \lambda_1} - \bar{\lambda}_1 \dfrac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_1} \right) & |\lambda_2|^2 \left( \bar{\lambda}_1 + \mu_1 \dfrac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \lambda_1} \right) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Ecuaciones similares pueden darse para $A_{\mu_1}$ y $A_{\mu_2}$.

Las componentes de la conexión en la parametrización de Givens están dadas por [1]

$$A_{\phi_1} = \begin{pmatrix} -i \operatorname{sen}^2 \theta_1 & -i \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 e^{i(\phi_1 - \phi_2 - \psi_1)} \\ -i \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 e^{i(\phi_1 - \phi_2 - \psi_1)} & i \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$A_{\theta_1} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i(\phi_1 - \phi_2 - \psi_1)} \operatorname{sen} \theta_2 \\ -e^{-i(\phi_1 - \phi_2 - \psi_1)} \operatorname{sen} \theta_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$A_{\phi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \operatorname{sen}^2 \theta_2 \end{pmatrix}, \qquad A_{\theta_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

# Curvatura

Las componentes de la 2-forma de curvatura que se obtienen a partir de (9) y (10) están dadas por

$$F_{\lambda_1 \lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & F^{01}_{\lambda_1 \lambda_2} \\ F^{10}_{\lambda_1 \lambda_2} & F^{11}_{\lambda_1 \lambda_2} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$F^{01}_{\lambda_1 \lambda_2} = \left( \lambda_1 \frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \lambda_1} - \bar{\mu}_1 \right) \left[ \bar{\lambda}_2 \left( \lambda_2 \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial \lambda_2} + \bar{\mu}_2 \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_2} \right) - \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial \lambda_2} \right], \tag{15}$$

$$F^{10}_{\lambda_1 \lambda_2} = -\left( \mu_1 \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial \lambda_1} - \bar{\lambda}_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_{\ 1}} \right) \left[ \lambda_2 \left( \lambda_2 \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial \lambda_2} + \bar{\mu}_2 \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_2} \right) + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_2} \right],$$

$$F^{11}_{\lambda_1 \lambda_2} = -\left( \bar{\lambda}_1 + \mu_1 \frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \lambda_1} \right) \frac{\partial \left| \lambda_2 \right|^2}{\partial \lambda_2}.$$

Las componentes en la parametrización de Givens están dadas por

$$F_{\theta_1\theta_2} = \cos\theta_2 e^{i(\phi_2+\phi_1-\psi_1)}\,|\,0\rangle\langle 1\,| + \cos\theta_2 e^{i(\phi_2-\phi_1+\psi_1)}\,|\,1\rangle\langle 0\,|\,, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} F_{\phi_1\theta_2} &= i\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_1\cos\theta_2 e^{i(\phi_1-\phi_2-\psi_1)}\,|\,0\rangle\langle 1\,| - \\ &\quad i\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_1\cos\theta_2 e^{i(\phi_2-\phi_1+\psi_1)}\,|\,1\rangle\langle 0\,| - 2i\,\text{sen}\,\theta_2\cos\theta_2\,\text{sen}^2\,\theta_2\,|\,1\rangle\langle 1\,|\,, \\ F_{\phi_2\theta_2} &= 2i\,\text{sen}\,\theta_2\cos\theta_2\,|\,1\rangle\langle 1\,|\,. \end{aligned} \tag{17}$$

# Conclusiones

Con base en el Hamiltoniano del modelo de tres estados (e.c 2), se construye formalmente los haces fibrados $F_{CCG}$ y $P^*F_{CCG}$ dados en las ecuaciones (5) y (6) respectivamente. Del fibrado principal definido en la ecuación (6) se construyen explícitamente las componentes de la conexión en la parametrización de Givens. Se contruye también las componentes de la curvatura resultante de las componentes de la conexión que conmutan entre si.

# Agradecimientos

Este artículo fue financiado por la universidad EAFIT, bajo el proyecto de investigación número 817431.

## References

[1] A. Niskanen, M. Nakahara y M. Salomaa, Phys. Rev. A **67**, 012319(2003)
[2] P. Zanardi y M. Rasetti. Phys. lett. A **262**, 94(1999).
[3] A. Niskanen, Tesis de Maestría, Helsinki University of technology (2002).
[4] M. Vélez y A. Sicard, Informe técnico, universidad EAFIT (2003), (En ejecucion).
[5] K. Fujii, Reports on Mathematical Physics **48**, 75 (2001).