REVISTA COLOMBIANA DE FISICA, VOL. 33, No. 2. 2001

EL FORMALISMO DE LA TEORÍA GAUGE EN LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA

Mario Vélez y Andrés Sicard
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

RESUMEN

Se describe como la computación cuántica holonómica se realiza mediante el transporte paralelo de elementos de un haz fibrado principal a lo largo de una curva cerrada en el espacio base. En cada punto del espacio base existe un código cuántico, el conjunto de éstos describe un haz fibrado principal, el cual tiene una topología no trivial, ésta es descrita por un potencial *gauge*. La holonomía asociada al campo *gauge* es el grupo de Lie U(1) en el caso abeliano.

PACS: 03.65.-w, 03.67.Lx, 03.65.Vf

COMPUTACIÓN CUÁNTICA

Diferentes modelos formales de computación fueron establecidos en la decada de los 30's, en particular, el modelo denominado ``máquina de Turing", construido por Alan Turing en 1936, fue el modelo de computación clásica en el cual se baso el primer modelo de computación cuántica denominado ``máquina de Turing cuántica", construido por David Deutsch [1] en 1985. Es decir, hubo la necesidad de esperar cinco decadas para contar con este modelo; sin embargo, durante este lapso de tiempo fueron establecidos resultados importantes —tales como la computación reversible, la computación probabilista, la construcción de compuertas universales reversibles, etc. — que posibilitaron la construcción del mismo.

A partir de las construcciones y resultados anteriores, se establece la equipotencia entre los diferentes modelos de computación subyacentes, es decir, los modelos de computación clásica, probabilista, reversible o cuántica, computan los mismos objetos Turing-computables. Una vez establecido los modelos de computación cuántica, comienza la busqueda inicial de algoritmos y propuestas de implementación sobre ellos. En relación con los algoritmos cuánticos, quizás no sea exagerado afirmar que fue el algoritmo propuesto por Peter Shor en 1994, quien situó a la computación cuántica en el lugar privilegiado en que hoy se encuentra. La complejidad algorítmica temporal asociada a este algoritmo —diseñado para factorizar un número es sus factores primos— establece un ``ruptura" (exponencial-polinomial) en términos de la complejidad algorítmica con su contraparte clásico. Esta situación establece que —por lo menos desde la perspectiva teórica—, mientras un computador clásico necesita alrededor de 4.25×10^{25} años para factorizar un número de 1000 dígitos, un computador cuántico para realizar la misma tarea necesita alrededor de 307 días.

En relación con las propuestas de implementación es necesario mencionar que no hay consenso sobre la posibilidad o imposibilidad de las mismas debido al fénomeno de la decoherencia para sistema físicos de determinado número de elementos. Sin embargo, un alto porcentaje de la investigación actual en computación cuántica —apoyada por grandes inversiones en dinero tanto gubernamentales como privadas— tiene como objetivo la construcción de máquinas cuánticas. El logro más importante en está dirección —al momento de escribir este artículo— es el computador cuántico de cinco qubits construido por IBM y la universidad Stanford [6].

COMPUTACIÓN HOLONÓMICA

Los estados puros $|\psi\rangle$ en la mecánica cuántica, corrientemente se describen como clases de equivalencia de estados módulo una fase de la forma $e^{i\phi}$, donde $\phi \in (0,2\pi]$. Matemáticamente los estados puros están en una correspondencia uno a uno con los elementos del espacio proyectivo complejo CP^{N-1}. En este contexto, la computación cuántica holonómica se formula en un haz fibrado principal [2,3,4,5,7]. Sea H un espacio de Hilbert isomorfo a C^N. El espacio de los qubits se define como la esfera unitaria en H, $S^N = \{|\psi\rangle \in H \mid \langle\psi|\psi\rangle = 1\}$, la restricción en esta ecuación implica la condición de ortonormalidad para los qubits de la base elegida de S^N, es decir, $\langle\psi|\psi\rangle = \delta_{ij}$, y los coeficientes de la combinación, satisfacen $\sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|$. Se define el espacio complejo proyectivo CP^{N-1}, como el conjunto de todos los rayos que atraviesan el origen de coordenadas en S^N. El espacio CP^{N-1} tiene estructura de variedad suave. Existe una función canónica, llamada la proyección $\prod : S^N \to CP^{N-1}$ donde $\prod(|\psi\rangle) = |\psi\rangle\langle\psi|$, tal que $\langle\psi|$ es un elemento del espacio S^{N*} dual de S^N. Una acción a derecha del grupo de Lie U(1) sobre S^N es definida como $\sigma : S^N \times U(1) \to S^N$ donde

$$\sigma(\ (|\psi\rangle, e^{i\phi})\ ) = |\psi\rangle e^{i\phi}, \qquad (1)$$

La proyección es compatible con la acción a derecha de U (1) sobre S^N, puesto que $\prod(|\psi\rangle e^{i\phi}) = \prod(|\psi\rangle) = |\psi\rangle\langle\psi|$. Las consideraciones anteriores permiten definir el escenario formal donde opera la computación cuántica holonómica, este escenario corresponde al haz fibrado principal $\{U(1), S^N, \prod, CP^{N-1}\}$, en el cual S^N es el espacio total, CP^{N-1} es el espacio base, $\prod$ es la proyección y U(1) es la fibra típica. Sea M una variedad suave, llamada el espacio paramétrico, sobre ella se define la siguiente función $\xi : M \to CP^{N-1}$ donde $\xi(\lambda) = \prod(|\psi\rangle_\lambda)$.

Se define una nueva variedad E, parametrizada por los elementos de M dada por E= $\{(\lambda, |\psi\rangle_\lambda) \in M \times S^N\}$. Una nueva proyección de E en M se define como $\prod_E : E \to M$ donde

$$\prod_E((\lambda, |\psi\rangle_\lambda)) = \lambda \qquad [2]$$

El conjunto $\{U(1), E, \prod_E, M\}$ es un haz fibrado principal llamado el *pull-back* sobre M dado por $\xi^* \{U(1), S^N, \prod, CP^{N-1}\} = \{U(1), S^N, \prod, CP^{N-1}\}$. Las secciones χ del *pull-back* sobre M son construidas sobre un abierto U de M por $\chi : U \to E$ donde

$$\chi(\lambda) = (\lambda, |\psi\rangle_\lambda), \qquad [3]$$

además, se define sobre U una 1-forma conexión —campo *gauge*— como

$$A(\lambda) = {}_\lambda \langle \psi | d | \psi \rangle_\lambda . \qquad [4]$$

$|\psi\rangle_\lambda$

Si λ^μ son coordenadas locales de M, d es una 1-forma diferencial sobre M. La conexión A se expresa en términos de las coordenadas locales de M como $A_\mu(\lambda) = {}_\lambda \langle \psi | \frac{\partial}{\partial \lambda^\mu} | \psi \rangle_\lambda$. La acción a derecha del grupo de Lie U(1) definida en (1) es compatible con la proyección definida en (2) puesto que $\prod_E((\lambda, g|\psi\rangle_\lambda)) = \lambda$, donde $g \in U(1)$. Un cambio de coordenadas en la fibra —transformación *gauge*— es inducido mediante la acción del grupo de Lie $U(1)$ y la sección χ definida en (3) por $A_\mu'(\lambda) = {}_\lambda \langle \psi | g^+ \frac{\partial}{\partial \lambda^\mu} g | \psi \rangle_\lambda$. Después de realizar la derivada indicada y usar la relación de ortonormalidad para $|\psi\rangle_\lambda$, se obtiene $A_\mu'(\lambda) = A_\mu + i \frac{\partial}{\partial \lambda^\mu} \phi(\lambda)$.

Se considera un ciclo cerrado $\gamma : [0, \tau] \to CP^{N-1}$ tal que $\gamma(0) = \gamma(\tau)$ en el espacio base. Un *horizontal lift* se define como un ciclo cerrado $\tilde{\gamma} : [0, \tau] \to S^N$, tal que $\prod(\tilde{\gamma}) = \gamma$. Un estado de S^N dado por

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{i\phi(t)} |\psi(t)\rangle , \qquad [5]$$

donde $|\psi(t)\rangle = \chi' \circ \gamma(t)$ y χ' es una sección definida por $\chi' : CP^{N-1} \to S^N$, evoluciona en el *horizontal lift* $\tilde{\gamma}$.

Al evaluar la expresión (5) en $t = 0$ y en $t = \tau$ después de simplificar se obtiene

$$|\tilde{\psi}(\tau)\rangle = e^{i\beta} |\psi(0)\rangle , \qquad [6]$$

donde $\beta = \phi(\tau) - \phi(0)$.

De otro lado la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}\rangle = \hat{H} |\tilde{\psi}\rangle , \qquad [7]$$

determina la evolución temporal $|\tilde{\psi}(0)\rangle \to |\psi(t)\rangle$ en el espacio total S^N y vía la proyección $\prod$ en el espacio base CP^{N-1}. Si se tiene en cuenta el transporte paralelo del estado expresado en (5) y se reemplaza éste en la ecuación (7), se obtiene

$$\xi = i \sum_\mu \int_0^\tau \langle \psi(t) | \frac{\partial}{\partial \lambda^\mu} | \psi \rangle d\lambda^\mu , \qquad [8]$$

el integrando de la ecuación (8) es la 1-forma conexión definida en (4), al reemplazar ésta en la ecuación (8) se obtiene

$$\xi = i\sum_{\mu}\int_{\gamma} A_{\mu} d\lambda^{\mu} \ , \qquad [9]$$

La exponencial de esta expresión es la holonomia $U(1)$, es invariante *gauge* y no depende del Hamiltoniano $\hat{H}$, su origen es puramente geométrico.

COMPUERTAS CUÁNTICAS

Como aplicación del formalismo anterior para el caso de 1-qubit, $N = 2$, se construye un modelo de computación cuántica holonómica, al implementar una compuerta de 1-qubit —compuerta de fase— que junto a la compuerta de Hadamard —también de 1-qubit—, induce el estado más general de 1-qubit [2]. Para que el modelo de computación sea universal, es necesario implementar otra compuerta de 2-qubits —compuerta de fase controlada— ésta es construida, al igual que la compuerta de fase, a partir del modelo de computación cuántica holonómica. La fase geométrica que implementa la compuerta de fase, se calcula parametrizando el estado $\left|\tilde{\psi}(\alpha)\right\rangle$ de S^2 como $\left|\tilde{\psi}(\alpha)\right\rangle = \cos(\theta/2)\left|0\right\rangle + \mathrm{sen}(\theta/2)e^{i\alpha}\left|1\right\rangle$, donde el conjunto $\{\left|0\right\rangle, \left|1\right\rangle\}$ es la base de S^2 y α es un parámetro que varía entre 0 y 2π. Usando (4) donde d es operador de diferenciación con respecto a α, además de la condición de ortonormalidad para los estados de la base, despúes de sustituir en (9) se obtiene $\xi = -\pi(1-\cos\theta)$. Este resultado implementa la compuerta de fase, dada por $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$.

La fase geométrica es usada para modelar una compuerta de fase de 2-qubit, llamada la compuerta controlada de fase, a fin de que el modelo de computación sea universal. Tanto la compuerta de fase, como la compuerta de fase controlada han sido implementadas en experimentos de resonancia nuclear magnética (NMR) [2,5].

CONCLUSIONES

La computación cuántica holonómica admite una formulación en términos de un haz fibrado principal $\{U(1), S^N, \prod, CP^{N-1}\}$. La conexión —campo *gauge*— que se obtiene en este formalismo, se utiliza como ingrediente fundamental en la solución de la ecuación de Schrödinger, de la solución se obtienen las compuertas lógico-cuánticas las cuales resultan de algunas holonomias específicas. Con el modelo de computación cuántica holonómica se obtienen, en particular, dos compuertas lógico-cuánticas, la compuerta de 1-qubit llamada la compuerta de fase y una compuerta de 2-qubits llamada la compuerta de fase controlada, estas dos compuertas no forman un modelo de computación cuántica universal, pero, si se tiene de alguna otra fuente la compuerta de Hadamard y se considera también la compuerta de 1-qubits de fase controlada, el modelo resulta ser universal.

AGRADECIMIENTOS

Este artículo fue financiado por la universidad EAFIT, bajo el proyecto de investigación No. 817431. Agradecemos al profesor Carlos Cadavid de la universidad EAFIT las múltiples aclaraciones realizadas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] David Deutsch. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings Royal Society London*, A400:97-117, 1985.

[2] Artur Ekert et *al*. Geometric quantum computation.. Eprint: http://arXiv.org/abs/quant-ph/0004015.

[3] Kazuyuki Fujii. From geometry to quantum computation. Eprint: http://arXiv.org/abs/quant-ph/0107128, 2001.

[4] Kazuyuki Fujii. Introduction to Grassmann manifolds and quantum computation. Eprint: http://arXiv.org/abs/quant-ph/0103011, 2001.

[5] Jonathan Jones, Vlatko Vedral, Artur Ekert, and Giuseppe Castagnoli. Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 403:869-871, February 2000.

[6] Mathias Sttefen and Isaac L. Chuang. Toward quantum computation: A five-qubit quantum processor. *IEEE Micro*, pages 24-34, March-April 2001.

[7] Paolo Zanardi and Mario Rasetti. Holonomic quantum computation. *Physics Letters A*, 264:94-99, 1999.