REVISTA COLOMBIANA DE FÍSICA, VOL.35, No.2, 2003

UNIVERSALIDAD DE LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA GEOMÉTRICA: MODELO DEL MEDIO KERR

Andrés Sicard[1], Mario Vélez
Grupo de Lógica y Computación
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia
[1] email: asicard@eafit.edu.co

RESUMEN

El modelo del medio Kerr es un modelo de computación cuántica geométrica. Se demuestra que éste es un modelo de computación cuántica universal. Para cada una de las compuertas cuánticas que generan la universalidad, se presenta explícitamente el operador de holonomía $\Gamma_A(\gamma)$ y el ciclo γ sobre los cuales son construidas.

ABSTRACT

The Kerr medium´s model is a Geometric Quantum Computation model. We proof that it is universal quantum computation model. For every quantum gate that produce the universality, we explicitly show the holonomy operator $\Gamma_A(\gamma)$ and the loop γ associated with them.

PACS: 03,65. $-w$, 03,67.Lx, 03,65.Bz
Palabras Clave: Computación cuántica geométrica, universalidad, medio Kerr.

Introducción

La universalidad de un modelo de computación cuántica, es decir, su capacidad de realizar cualquier operación que realice una máquina de Turing, se establece por su capacidad de generar un conjunto de compuertas cuánticas $\mathcal{U}$, tales que cualquier transformación unitaria $U(k = 2^n)$, es decir, cualquier compuerta cuántica que opere sobre n-qubits, puede ser aproximada con suficiente exactitud por un circuito cuántico que consta únicamente de un número finito de compuertas del conjunto $\mathcal{U}$.

La universalidad o no un modelo de computación cuatica geométrica está determinada por el grupo de holonomía $Hol(A)$ asociado a su conexión A. Hoy en día se sabe que la condición de irreducibilidad de la conexión A para $U(4)$ es una condición suficiente, pero no necesaria para obtener la universalidad [3]. Cuando la conexión no es irreducible, la universalidad para $U(4)$ se obtiene demostrando que el modelo puede construir al menos una compuerta de 2-qubits "no local" o "no trivial", es decir, una compuerta que no sea de la forma $SU(2) \times \mathbb{I}_2$ o de la forma $\mathbb{I}_2 \times SU(2)$ [4].

El objetivo del presente artículo es establecer explícitamente la universalidad del modelo de Computación Cuántica Geométrica No Abeliana (CCGNA), denominado el modelo del medi Kerr.

El modelo del medio Kerr

Se presenta un modelo de CCGNA proveniente de la óptica cuántica, denominado el modelo del medio Kerr, el cual ha sido desarrollado por Jiannis Pachos y Paolo Zanardi [6] como una posible aplicación del modelo desarrollado por Paolo Zanardi y Mario Rasetti [2]. En este modelo, la CCGNA producida por haces

Característica	**1-qubit**	**2-qubit**
Hamiltoniano	$H_0 = Xn(n-1)$, donde X es una constante proporcional no lineal [6] y n es el operador número	$H_0 = Xn_1(n_1-1) + Xn_2(n_2-1)$, donde $n_i = a_i^\dagger a_i$ con $i=1,2$, y $a_1 = a\otimes \mathbb{1}, a_1^\dagger = a^\dagger \otimes \mathbb{1}, a_2 = \mathbb{1}\otimes a, a_2^\dagger = \mathbb{1}\otimes a^\dagger$
Autovalores para $E=0$	$\|0\rangle, \|1\rangle \in \mathcal{F} = \{\|\nu\rangle; \nu = 1,2,\dots\}$	$\{\|00\rangle, \|01\rangle, \|10\rangle, \|11\rangle\}$
Operadores unitarios	$D(\lambda) = e^{\lambda a^\dagger - \bar{\lambda} a}$, $S(\mu) = e^{\mu a^{\dagger 2} - \bar{\mu} a^2}$	$N(\xi) = e^{\xi a_1^\dagger a_2 - \bar{\xi} a_2^\dagger a_1}$, $M(\zeta) = e^{\zeta a_1^\dagger a_2^\dagger - \bar{\zeta} a_2 a_1}$
Transformación isoespectral	$H(\lambda,\mu) = g^\dagger(\lambda,\mu) H_0 g(\lambda,\mu)$, donde $g(\lambda,\mu) = D(\lambda)S(\mu)$	$H(\xi,\zeta) = g^\dagger(\xi,\zeta) H_0 g(\xi,\zeta)$, donde $g(\xi,\zeta) = N(\xi)M(\zeta)$
Conexión	$A = A_\lambda d\lambda + A_\mu d\mu - A_{\bar{\lambda}}^\dagger d\bar{\lambda} - A_{\bar{\mu}}^\dagger d\bar{\mu}$	$A = A_\zeta d\zeta + A_\xi d\xi - A_{\bar{\zeta}}^\dagger d\bar{\zeta} - A_{\bar{\xi}}^\dagger d\bar{\xi}$
Espacio paramétrico	$M(\lambda,\mu)$, donde $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$	$M(\xi,\zeta)$, donde $\xi,\zeta \in \mathbb{C}$
Componentes de la conexión $A_{\sigma_i}^{\alpha\beta}$	$\langle \alpha \| g^\dagger(\lambda,\mu) \frac{\partial}{\partial \sigma_i} g(\lambda,\mu) \| \beta \rangle$, donde $\alpha,\beta \in \{0,1\}$ y $\sigma_i \in \{\lambda,\mu\}$	$\langle \alpha \| g^\dagger(\lambda,\mu) \frac{\partial}{\partial \sigma_i} g(\lambda,\mu) \| \beta \rangle$, donde $\alpha,\beta \in \{00,01,10,11\}$ y $\sigma_i \in \{\xi,\zeta\}$.

Tabla 1: Características del modelo del medio Kerr

coherentes, físicamente consiste de las interacciones no lineales efectuadas en un medio Kerr.

La tabla (1) presenta las características más relevantes del modelo del medio Kerr, tanto para el caso de 1-qubit como para el caso de un 2-qubit, desde la perspectiva de la universalidad del modelo [1].

De acuerdo a la parametrización

$$\lambda = x + iy, \quad \mu = r_1 e^{i\theta_1}, \tag{1}$$

$$\zeta = r_2 e^{i\theta_2}, \quad \xi = r_3 e^{i\theta_3}, \tag{2}$$

donde $x, y, r_1, \theta_1, r_2, \theta_2, r_3, \theta_3 \in \mathbb{R}$, las componentes de la conexión A_λ y A_μ para el caso de un 1-qubit toman la forma de la ecuación (3) y las componentes de la conexión A_ξ y A_ζ para el caso de un 2-qubit toman la forma de la ecuación (4) [1].

$$\begin{aligned} A_x &= \begin{pmatrix} -iy & -x_1 \\ x_1 & -iy \end{pmatrix}, A_y = i \begin{pmatrix} x & y_1 \\ y_2 & x \end{pmatrix}, \\ A_{r_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{\theta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{i}{4} \operatorname{senh}^2 r_1, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $x_1 = \cosh r_1 - e^{-i\theta_1} \operatorname{senh} r_1, y_1 = \cosh r_1 + e^{-i\theta_1} r_1 \operatorname{senh} r_1, y_2 = \cosh r_1 + e^{i\theta_1} r_1 \operatorname{senh} r_1$.

$$A_{r_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -e^{-i\theta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\theta_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{r_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-i\theta_3} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2\cosh^2 r_2 - 1),$$

$$A_{\theta_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\theta_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{i}{2} \operatorname{senh} 2r_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{i}{2} (\cosh 2r_2 - 1),$$

$$A_{\theta_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta_3} & 0 \\ 0 & e^{i\theta 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{i}{2} \cosh 2r_2 \operatorname{sen} 2r_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} i \operatorname{sen}^2 r_3. \tag{4}$$

Universalidad para el modelo del medio Kerr

Sean $R_x(\theta)$ y $R_y(\theta)$ las compuertas de rotación dadas por $R_x(\theta) = e^{-i\theta\Gamma_x/2}$, $R_y(\theta) = e^{-i\theta\Gamma_y/2}$, donde Γ_x y Γ_y son las matrices de Pauli, y sea E una compuerta "no trivial" de $U(4)$ dada por

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Teorema 0.0.1 (Descomposición X− Y). *Sea U cualquier operador unitario que opere sobre un 1-qubit. Entonces existen números reales α, β, γ y δ tales que [5]*

$$U = e^{i\alpha} R_x(\beta) R_y(\gamma) R_x(\delta).$$

Teorema 0.0.2. *Un conjunto de compuertas universales para $U(2)$ y la compuerta E de $U(4)$ son un conjunto de compuertas universales para $U(k = 2^n)$ [6].*

Con base en las ecuaciones (1) y (3), el operador de holonomía $\Gamma_A(\gamma)$ y el grupo de holonomía $Hol(A)$, asociados al medio Kerr para el caso de un 1-qubit, estan dados por

$$\Gamma_A(\gamma) = \mathcal{P} \exp \left(\oint_\gamma \sum_i A_i di \right), \tag{5}$$

donde $i \in \{x, y, r_1, \theta_1\}$ y

$$Hol(A) = \{\Gamma_A(\gamma) \mid \gamma \text{ ciclo sobre } \lambda_0\}, \tag{6}$$

donde $\lambda_0 \in M(x, y, r_1, \theta_1)$.

De acuerdo al teorema (0.0.1) sólo es necesario encontrar ciclos asociados a las compuertas de rotación R_y y R_x para obtener la universalidad $U(2)$. La construcción de la compuerta $R_y(\alpha)$ se realiza sobre el plano (x, r_1) fijando a cero los parámetros y y θ_1. Sobre este plano se construye el ciclo γ_{R_y} dado por

$$\gamma_{R_y}(\alpha)\colon (0,0) \to (0,b) \to (1,b) \to (1,0) \to (0,0)\,,$$

donde b es un parámetro que depende de α. Para el ciclo $\gamma_{R_y}(\alpha)$, la ecuación (5) toma la forma

$$\begin{aligned}
&\Gamma_A(\gamma_{R_y}(\alpha)) = \\
&\exp\left(-\oint_{\gamma_{R_y}(\alpha)} A_x\,dx + A_{r_1}\,dr_1\right) = \\
&\exp\left[-(1-e^{-b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \\
&R_y(\alpha), \quad \text{cuando } b = -ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right).
\end{aligned}$$

La construcción de la compuerta $R_x(\alpha)$ es similar a la compuerta $R_y(\alpha)$, pero se realiza sobre el plano (y, r_1).

Por otra parte, con base en las ecuaciones (2) y (4), el operador de holomonía y el grupo de holonomía $Hol(A)$, asociados al medio Kerr para el caso de un 2-qubit, toman la forma de las ecuaciones (5) y (6) donde $i \in \{r_2, r_3, \theta_2, \theta_3\}$ y $\lambda_0 \in M(r_2, r_3, \theta_2, \theta_3)$.

De acuerdo al teorema (0.0.2) sólo es necesario entonces encontrar un ciclo asociado a la compuerta E, para obtener la universalidad $U(4)$ (universalidad $U(k = 2^n)$) del modelo del medio Kerr. La construcción de la compuerta E se realiza sobre el plano (θ_3, r_2, r_3) fijando a cero el parámetro θ_2. Sobre este plano se construye el ciclo γ_E dado por

$$\begin{aligned}
\gamma_E\colon &(3\pi/2, 0, 0) \to (3\pi/2, b, 0) \to \\
&(3\pi/2, b, 1) \to (3\pi/2, 0, 1) \to \\
&(3\pi/2, 0, 0)\,,
\end{aligned}$$

donde b es una constante. Para el ciclo $\gamma_E(b)$, la ecuación (5) toma la forma

$$\begin{aligned}
&\Gamma_A(\gamma_E(b)) = \\
&\exp\left(-\oint_{\gamma_E(b)} A_{r_2}\,dr_2 + A_{r_3}\,dr_3\right) = \\
&E, \quad \text{cuando } b = \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4+\pi}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Conclusiones

La universalidad $U(2)$ del modelo del medio Kerr se obtiene al construir las compuertas de rotación $R_x(\alpha)$ y $R_y(\alpha)$ que actúan sobre un 1-qubit, y la universalidad $U(k = 2^n)$ se obtiene a partir de las compuertas $R_x(\alpha)$ y $R_y(\alpha)$ y de la construcción de una compuerta "no trivial" E que actúa sobre un 2-qubit. Estas compuertas se obtienen como operadores de holonomía $\Gamma_A(\gamma)$ construídos con base en una conexión A y en ciclos γ sobre un espacio paramétrico M.

Referencias

[1] M. Vélez y A. Sicard, Informe técnico, Universidad EAFIT (2003),(en ejecución)

[2] P. Zanardi y M. Rasetti, Physics Letters A, **264**, 94(1999).

[3] D. Lucarelli (2002), eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0111078

[4] D. Lucarelli, Comunicación personal.

[5] I. L. Chuang y M. A. Nielsen, Quantum computation and quantum information, Cambridge: Cambridge University Press, (2000).

[6] J. Pachos y P. Zanardi (2001), eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0007110.