

Hipercomputación desde la Computación Cuántica

Andrés Sicard * Juan Ospina * Mario Vélez *

Resumen

Un hipercomputador computa funciones que son incomputables por una máquina de Turing. Recientemente, Tien D. Kieu ha propuesto un algoritmo hipercomputacional cuántico, el cual emplea como referente físico el oscilador armónico cuántico y resuelve en principio el décimo problema de Hilbert. Se realiza un análisis del algoritmo de Kieu y se deduce que está sustentado en ciertas propiedades del álgebra Weyl-Heisenberg, la cual es el álgebra dinámica asociada al oscilador armónico cuántico; y en una cierta aplicación del teorema adiabático de la mecánica cuántica. Con base en el análisis realizado, se presenta una adaptación algebraica del algoritmo de Kieu, es decir, se presenta un algoritmo *à la* Kieu sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$. Debido a que el álgebra $\mathfrak{su}(1, 1)$ admite realizaciones en sistemas físicos en las áreas de la óptica cuántica, la materia condensada y la física matemática, entre otras; la adaptación realizada amplía el espectro de posibilidades de implementación del algoritmo sobre uno de estos sistemas.

Palabras claves: *Hipercomputación, computación cuántica, Décimo problema de Hilbert, teorema adiabático, álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$.*

Abstract

The hypercomputers compute functions that cannot be computed by a Turing machine. Recently, Tien D. Kieu has proposed a hypercomputational quantum algorithm, which uses as physical referent the quantum harmonic oscillator and in principle solves Hilbert's tenth problem. An analysis of the Kieu's algorithm is made and it is deduced that the algorithm is based in the dynamical algebra associated with the quantum harmonic oscillator, the Weyl-Heisenberg algebra; and in a certain application of the adiabatic theorem of the quantum mechanics. With base in this analysis, an algebraic adaptation of Kieu's algorithm is constructed, that is to say, it is constructed an algorithm *à la* Kieu on the Lie algebra $\mathfrak{su}(1, 1)$. Because the algebra $\mathfrak{su}(1, 1)$ admits realizations within the fields of quantum optics, condensed matter, and mathematical physics, among others; the adaptation constructed ample the possibilities of implementation of the algorithm on one of these systems.

Keywords: *Hypercomputation, quantum computation, Hilbert's tenth problem, adiabatic theorem, Lie algebra $\mathfrak{su}(1, 1)$.*

1 Introducción

Un hipercomputador, de acuerdo con Jack Copeland y Diane Proudfoot [10], computa funciones o números, o más generalmente, resuelve problemas o realiza tareas, que no pueden ser computados o resueltas por una máquina de Turing (MT). La teoría de la hipercomputación

*Grupo en Lógica y Computación, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia, {asicard, mvelez}@eafit.edu.co, judoan@epm.net.co

por lo tanto diferencia entre los términos ‘computable’ y ‘computable por una MT’¹. Es decir, la teoría de la hipercomputación rechaza la idea de una *computabilidad absoluta*, independiente de cualquier teoría lógica, matemática, física o biológica subyacente. No obstante el surgimiento de una comunidad académica creciente alrededor del tema de hipercomputación, y aún a pesar de la proliferación de modelos teóricos [9, 33, 29], la posibilidad de una construcción *real* de una hiper máquina es controversial y está aún bajo análisis. En el contexto de la implementación de un hipercomputador, son de particular interés los modelos de hipercomputación fundamentados en la física y más específicamente en la computación cuántica.

Por computación cuántica se entiende “*a fundamentally new mode of information processing that can be performed only by harnessing physical phenomena unique to quantum mechanics*” [11]. Actualmente existen por lo menos seis modelos de computación cuántica: estándar, continuo, híbrido, adiabático, geométrico y anyónico-topológico. Hoy en día son bien conocidos los resultados obtenidos en términos de la complejidad algorítmica temporal del algoritmo de Lov K. Grover para la búsqueda en una base de datos desorganizada y del algoritmo de Peter Shor para la factorización de números enteros, especificados sobre el modelo de computación cuántica estándar [7].

Un malentendido muy frecuente en la literatura es no hacer distinción entre los términos ‘computación cuántica’ y ‘computación cuántica estándar’ (por ejemplo [8, 5]). Debido a este malentendido y debido a la equivalencia en términos de computabilidad, entre la computación cuántica estándar y las MTs establecida por David Deutsch [12]², se rechaza entonces la posibilidad de hipercomputación desde la computación cuántica. Sin embargo esta situación es errónea como lo demuestra la existencia de algoritmos cuánticos de hipercomputación.

En el 2001, Tien D. Kieu presentó un algoritmo hipercomputacional cuántico, es decir, Kieu presentó un algoritmo que soluciona un problema incomputable por una máquina de Turing (PIMT). El algoritmo de Kieu (AK), tal como lo son la mayoría de algoritmos cuánticos es probabilista. Desde su versión inicial, Kieu ha publicado más de diez artículos en los cuales presenta diferentes aspectos y características de su algoritmo. Las referencias a estos artículos y la versión más completa de su algoritmo se encuentra en [19].

El AK es especificado sobre el modelo de computación cuántica continua adiabática, emplea como referente físico el oscilador armónico cuántico y resuelve el décimo problema de Hilbert (DPH). Si bien el AK ha generado bastante controversia tanto a nivel de su construcción teórica como de su posible implementación [34, 32, 31, 15], hasta ahora no se han presentado argumentos concluyentes que lo refuten en ninguno de estos sentidos [19, 20, 21]³.

¹La teoría de hipercomputación no es la única teoría que establece una distinción entre los términos ‘computable’ y ‘computable por una MT’. Por ejemplo, en el contexto de la computación continua o *computable analysis*, se presenta el modelo BSS (Blum, Shub y Smale), el cual es un modelo de computación sobre un anillo arbitrario \mathfrak{R} . Cuando $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}_2$, el modelo BSS es equivalente a una MT, y cuando $\mathfrak{R} = \mathbb{R}$, el modelo computa funciones sobre los números reales [3]. Si bien no existe en la actualidad un único modelo de computación continua aceptado por la mayoría de la comunidad académica [36, 5], estos modelos al ser una generalización de la MT a los números reales, son considerados en algunas ocasiones, modelos de hipercomputación.

²En sentido estricto existe un clase de *hipercomputación débil* que pueden realizar los modelos de computación cuántica estándar: la generación de (verdaderos) números aleatorios [12]. Sin embargo, no es claro en la actualidad como emplear esta propiedad para solucionar un problema incomputable por una máquina de Turing [24].

³Aunque es cierto que Kieu ha refutado las diferentes críticas a su algoritmo, existe una observación importante respecto a su posible implementación que aún no ha sido resuelta, en palabras de Kieu: “... *there have been some concerns (this pointed has been raised on separate occasions by Martin Davis (2003), Stephen van Enk (2004) and Andrew Hodges (2004)) that infinite precision is still required in physically setting up the various integers parameters in the time-dependent quantum Hamiltonians. While the issue*

Una cuestión importante es la de determinar si el AK puede adaptarse a otros referentes físicos diferentes al empleado por Kieu. El artículo presenta un análisis del AK en el cual se obtiene que éste está sustentado en ciertas propiedades del álgebra Weyl-Heisenberg, la cual es el álgebra dinámica asociada al oscilador armónico cuántico; y en una cierta aplicación del teorema adiabático de la mecánica cuántica [23]. Aunque los autores han realizado una adaptación del AK a un referente físico concreto, la caja de potencial infinita [30, 28]; de acuerdo con su conocimiento, no existe en la literatura una adaptación algebraica del AK, es decir, no existe en la literatura una adaptación del AK apropiada para un conjunto de referentes físicos que satisfagan ciertas propiedades algebraicas.

Con base en el análisis del AK realizado, el artículo presenta un algoritmo *à la* Kieu sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$, es decir, se presenta una adaptación del AK válida para cualquier referente físico cuya álgebra dinámica sea $\mathfrak{su}(1, 1)$. La elección de esta álgebra es debido al hecho que ésta admite diferentes realizaciones en sistemas de óptica cuántica, tales como los sistemas de uno, dos y cuatro modos de fotones [35, 14]; en sistemas del dominio de la materia condensada, tales como la caja de potencial infinita y los potenciales Pöschl-Teller [1]; y en sistemas de la física matemática, tales como los osciladores de Laguerre, de Legendre y de Chebyshev [4]; entre otros.

Debido a la naturaleza de la adaptación realizada del AK, el énfasis de la presentación será sobre los aspectos algebraicos y computacionales, más que sobre los aspectos físicos de los sistemas cuánticos involucrados. Se espera adicionalmente que la exposición pueda ser seguida en lo esencial, sin necesidad de conocimientos en mecánica cuántica.

2 El Décimo Problema de Hilbert y Algunos Preliminares Matemáticos

El DPH fue formulado por David Hilbert en 1900. En 1973, Yuri Matiyasevich, a partir de los resultados obtenidos por Martin Davis, Julia Robinson y Hilary Putnam, demostró que este problema es equivalente al problema de la parada de una MT y por lo tanto es un PIMT [22]. Una ecuación Diofantina es una ecuación de la forma

$$D(x_1, \dots, x_k) = 0, \quad (1)$$

donde D es un polinomio con coeficientes enteros. El DPH puede ser formulado de la siguiente manera:

Dada cualquier ecuación Diofantina con cualquier número finito de incógnitas, diseñar un procedimiento universal a partir del cual se pueda determinar, en un número finito de operaciones, si la ecuación tiene o no solución en los números enteros.

Además del resultado establecido por Matiyasevich para el DPH, existen resultados adicionales sobre ciertas familias de ecuaciones Diofantinas [26]: (i) El DPH para ecuaciones Diofantinas lineales y cuadráticas es computable por una MT, (ii) El DPH para ecuaciones Diofantinas cúbicas es un problema abierto, (iii) El DPH para ecuaciones Diofantinas de cuarto grado es PIMT, (iv) El DPH para ecuaciones Diofantinas de una variable es computable por una MT, (v) El DPH para ecuaciones Diofantinas de 2 a 8 variables es un problema

deservers further investigations as surely any systematic errors in the Hamiltonians would be fatal, we still are not convinced that such integer parameters cannot be satisfactorily set up. In particular, we would like to understand the effects of statistical (as opposed to systematic) errors on the statistical behaviour of the spectrum of our adiabatic Hamiltonians" [18, p. 180].

abierto y (vi) El DPH para ecuaciones Diofantinas de 9 o más variables es PIMT.

El DPH es un problema semi-computable por una MT en el sentido que sí (1) tiene solución en los números enteros, una búsqueda exhaustiva sobre las k -tuplas de números enteros la encontraría, mientras que si (1) no tiene solución, esta búsqueda no terminaría. En este sentido, se puede interpretar ingenuamente que el AK lleva a cabo una búsqueda infinita sobre todas las posibles k -tuplas de números enteros. La posibilidad del AK de presentar una solución al DPH sin necesidad de realizar una búsqueda infinita, está sustentada en el hecho de que si bien el DPH es un PIMT, éste es un problema finitamente refutable [6]. Es decir, sólo es necesario realizar la búsqueda sobre un conjunto finito de números enteros, para determinar si (1) tiene o no solución. Puesto que el DPH es un PIMT significa entonces que no es posible generar por un MT el conjunto finito refutante para cada posible ecuación Diofantina.

El DPH contiene como casos particulares ciertos problemas matemáticos abiertos muy importantes tales como la conjetura de Goldbach (¿es posible escribir cualquier número par mayor o igual que cuatro como la suma de dos números primos?) y la hipótesis de Riemann (hipótesis acerca de la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann). Una solución a estos problemas mediante un algoritmo hipercomputacional, eficiente e implementable para el DPH, representaría un hito importante en el desarrollo de las matemáticas al establecer efectivamente la ruptura de la equivalencia entre los términos ‘algoritmo’ y ‘computable por una MT’.

Como fue mencionado, el AK emplea como referente físico el oscilador armónico cuántico cuya álgebra dinámica asociada es el álgebra Weyl-Heisenberg. Esta álgebra es un álgebra de Lie 3-dimensional generada por tres operadores denominados, operador identidad \mathbb{I} , operador de aniquilación a y operador de creación a^\dagger , los cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{I}, \quad [a, \mathbb{I}] = a, \quad [a^\dagger, \mathbb{I}] = a^\dagger, \quad (2)$$

donde $[x, y] = xy - yx$.

Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ el conjunto de los números enteros no negativos. Las representaciones lineales ∞ -dimensionales de los operadores \mathbb{I} , a y a^\dagger son

$$\mathbb{I}e_n = e_n, \quad ae_0 = 0, \quad ae_n = \sqrt{n}e_{n-1}, \quad a^\dagger e_n = \sqrt{n+1}e_{n+1}, \quad (3)$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y el vector e_n es un vector columna ∞ -dimensional con todas sus componentes nulas excepto la componente n (contando desde 0) la cual vale 1, es decir,

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad (4)$$

y las representaciones matriciales ∞ -dimensionales de \mathbb{I} , a y a^\dagger de acuerdo con (3) y (4) son

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5)$$

A partir de los operadores a y a^\dagger se construye el operador número N dado por

$$N = a^\dagger a, \quad (6)$$

cuyos autovalores son los números enteros no negativos y cuyos autovectores son los vectores e_n , es decir

$$N e_n = n e_n, \quad (7)$$

y cuya representación matricial es una matriz ∞ -dimensional diagonal de la forma

$$\begin{aligned} N &= \text{diag}(0, 1, 2, 3, \dots) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Por otra parte, la ecuación de autovectores para el operador de aniquilación a está dada por

$$aW = wW \quad (9)$$

donde $w \in \mathbb{C}$. Debido a que W es un vector en el espacio vectorial ∞ -dimensional generado por los vectores ortonormales e_n , puede escribirse como

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} C(n) e_n. \quad (10)$$

Al sustituir (10) en (9) y al emplear (3) se obtiene una ecuación de recurrencia para los términos $C(n)$. Resolviendo esta ecuación y exigiendo que W sea normalizado se obtiene la solución explícita de (9) dada por

$$\begin{aligned} W &= e^{-\frac{|w|^2}{2}} \left(e_0 + w e_1 + \frac{w^2}{\sqrt{2!}} e_2 + \frac{w^3}{\sqrt{3!}} e_3 + \dots \right) \\ &= e^{-\frac{|w|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\sqrt{n!}} e_n, \end{aligned} \quad (11)$$

y debido a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w^n}{\sqrt{n!}} = 0$, las componentes con mayor valor en el vector W son las componentes iniciales.

Es posible asociar a partir del vector W , una distribución de probabilidad $P_n(w)$ para la variable n considerada como variable aleatoria. La forma de $P_n(w)$ es de tipo Poisson y está dada por

$$P_n(w) = e^{-|w|^2} \frac{|w|^{2n}}{n!}. \quad (12)$$

Esta distribución de probabilidad tiene la propiedad que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $|w| \geq 0,84$, se cumple que

$$P_n(w) < 1/2, \quad (13)$$

lo cual es ilustrado en la figura 1 para $w = 1,5$.

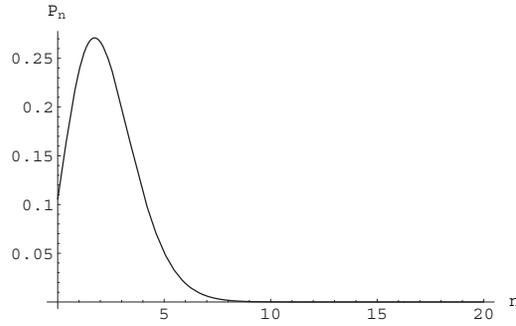


Fig. 1. Distribución de probabilidad $P_n(w)$ para $w = 1,5$

3 Algoritmo Hipercomputacional Cuántico de Kieu

El AK está basado en una generalización a espacios ∞ -dimensionales de la computación cuántica adiabática propuesta por Edward Farhi *et al.* [13]. Sustentado en la equivalencia entre el DPH sobre \mathbb{Z} y el DPH sobre \mathbb{N} [22], el AK resuelve el DPH sobre los números enteros no negativos. El AK tiene la siguiente estructura [19]: mediante un proceso de codificación, una instancia del DPH es traducida en un problema espectral para un cierto operador con representación matricial ∞ -dimensional. Luego, este problema espectral en conjunto con una determinada inicialización, es resuelto mediante la aplicación de un teorema de evolución espectral denominado teorema adiabático [23]. Puesto que este teorema no establece *a-priori* para que tiempo finito de evolución se resuelve el problema espectral, se adiciona un criterio de parada, no contemplado por el teorema adiabático y propio del AK. Finalmente, la solución al problema espectral obtenida es decodificada para determinar si la instancia del DPH, tiene o no solución en los números enteros no negativos. La estructura del AK es ilustrada en la figura 2 y a continuación se presenta cada uno de los componentes de esta estructura.

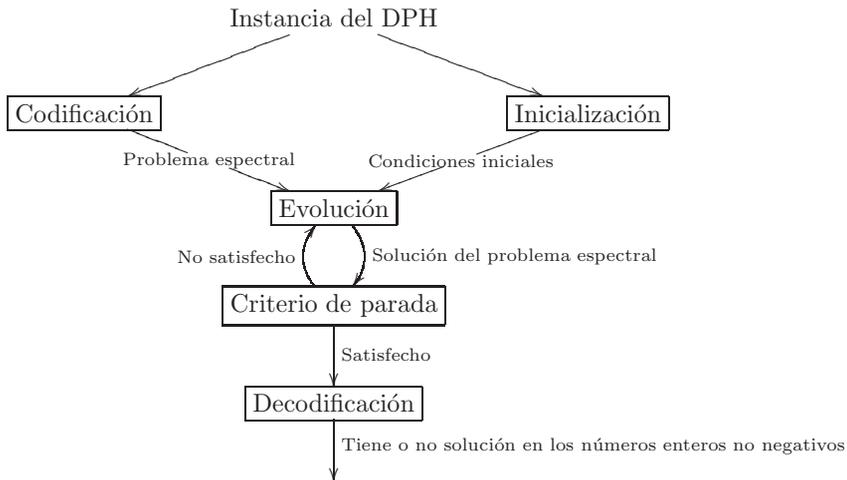


Fig. 2. Estructura general del AK

3.1 Codificación-Decodificación

EL proceso de codificación de la instancia del DPH empleado por el AK está sustentado en el operador número (8) asociado al álgebra Weyl-Heisenberg. La codificación de la ecuación Diofantina (1) consiste en reemplazar cada una de las variables de (1) por el operador N y construir el operador codificante diagonal ∞ -dimensional H_D definido como

$$H_D = D(N_1, N_2, \dots, N_k)^2, \quad (14)$$

donde N_1, N_2, \dots, N_k son k distintas representaciones del operador N definidas por

$$N_1 = N \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{k-1 \text{ veces}}, \quad (15)$$

$$N_2 = \mathbb{I} \otimes N \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{k-2 \text{ veces}}, \quad (16)$$

$$\vdots$$

$$N_k = \underbrace{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{k-1 \text{ veces}} \otimes N, \quad (17)$$

donde \otimes representa la operación de producto tensorial.

Este operador codificante H_D presenta la característica fundamental que (1) tiene una solución en \mathbb{N}^k , si y sólo si, H_D tiene un autovalor nulo. De esta manera se traslada el problema de determinar si una ecuación Diofantina tiene o no solución en \mathbb{N} , al problema espectral de determinar si el operador codificante H_D tiene o no un autovalor nulo. Esta codificación-decodificación es ilustrada por la figura 3, en donde v_g representa el autovector asociado al menor autovalor de H_D .

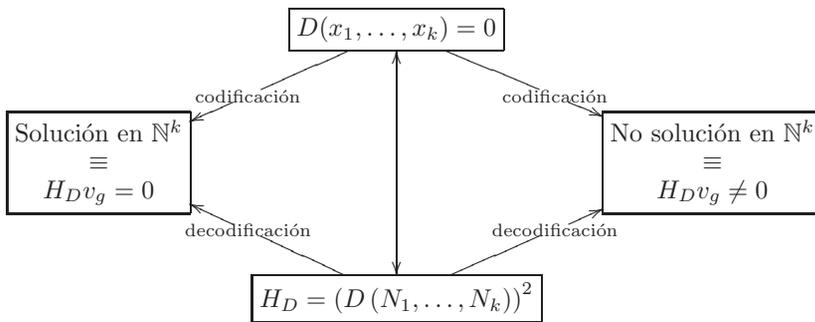


Fig. 3. Codificación-Decodificación del DPH empleado por el AK

3.2 Inicialización

El problema espectral de determinar si el operador codificante H_D tiene o no un autovalor nulo, no tiene una solución computable por una MT debido a que H_D es un operador con representación ∞ -dimensional. De hecho si esta solución existiera, de acuerdo con la codificación-decodificación ilustrada en la figura 3, el DHP tendría una solución computable por un MT, lo cual sería una contradicción al resultado obtenido por Matiyasevich. Para resolver el problema espectral planteado, el AK emplea el teorema adiabático que permite obtener el

autovalor más bajo de H_D si éste puede ser relacionado de cierta forma con un operador inicial H_I , el cual tiene un autovalor cero asociado a un autovector inicial V_I . La construcción de H_I y V_I , tal como fue la construcción de H_D están basados en el álgebra Weyl-Heisenberg.

Para una ecuación Diofantina (1), se elige

$$V_I = W_1 \otimes \cdots \otimes W_k, \quad (18)$$

donde W_j es un vector de la forma (11) que satisface (9) y el operador inicial H_I está definido por

$$H_I = \sum_{j=1}^k (a_j^\dagger - w_j^* \mathbb{1})(a_j - w_j \mathbb{1}), \quad (19)$$

donde w_j^* denota el complejo conjugado de w_j , y los operadores a_j y a_j^\dagger son k distintas representaciones de los operadores a y a^\dagger definidos por

$$a_j = \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes a \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \quad (a \text{ en la posición } j), \quad (20)$$

$$a_j^\dagger = \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes a^\dagger \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \quad (a^\dagger \text{ en la posición } j). \quad (21)$$

De (18), (19) y (9) se tiene por construcción que

$$H_I V_I = 0, \quad (22)$$

es decir V_I es efectivamente el autovector de H_I asociado al autovalor cero. La figura 6 esquemmatiza esta construcción.

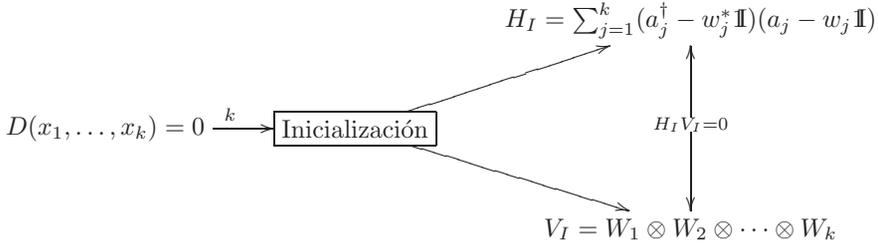


Fig. 4. Inicialización para la evolución empleada por el AK

3.3 Evolución

Como ha sido mencionado, el problema de determinar si (1) tiene o no solución en \mathbb{N} , se ha transformado en el problema espectral de determinar si el operador codificante H_D tiene un autovalor nulo. La solución empleada por el AK para este problema espectral consiste en conectar homotópicamente el operador H_D con el operador inicial H_I , de modo que por el empleo del teorema adiabático sobre operadores ∞ -dimensionales [2] se pueda interpolar desde el autovector V_I de H_I asociado a su autovalor nulo, hasta el autovector V_F de H_D correspondiente al autovalor más bajo de H_D .

En teoría, el teorema adiabático establece que para un tiempo de evolución $T \rightarrow \infty$ se obtiene el autovector V_F asociado al autovalor más bajo de H_D . Debido a que por supuesto este tiempo de evolución no es algorítmicamente válido, en la práctica el AK emplea el criterio que para un tiempo de evolución T *suficientemente grande pero finito* se obtendrá con

una buena probabilidad el autovector V_F . De este hecho proviene la naturaleza probabilista del algoritmo.

A partir de los operadores H_D y H_I se construye el operador $H_A(t)$ interpolante entre éstos que tiene la forma de combinación lineal convexa u homotopía dado por

$$H_A(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) H_I + \left(\frac{t}{T}\right) H_D, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (23)$$

La ecuación de evolución para $t \in [0, T]$ tiene la forma

$$\frac{dV(t)}{dt} = H_A(t)V(t), \quad (24)$$

donde $V(t)$ es un vector tal que

$$V_I = V(0) \text{ y } V_F = V(T), \quad (25)$$

es decir, se tiene una evolución con el operador $H_A(t)$ desde el vector inicial V_I hasta el vector final V_F . Para efectos de la adaptación que se realizará del AK, es importante señalar que a diferencia de la construcción de los operadores H_I y H_D y del vector inicial V_I , la construcción del operador $H_A(t)$ y la evolución (24) es independiente del álgebra Weyl-Heisenberg asociada al oscilador armónico cuántico.

Para la aplicación del teorema adiabático representado en la evolución (24) es necesario que se cumplan ciertas condiciones acerca de las propiedades espectrales del operador $H_A(t)$. Sea $\{v_l(t) \mid l \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de autovalores del operador $H_A(t)$, entre estas condiciones la más importante en el contexto del AK es que

$$v_{l+1}(t) - v_l(t) > 0, \text{ para todo } t \in [0, T], \quad (26)$$

es decir, existe una separación bien definida entre los autovalores de $H_A(t)$ en cada instante de tiempo t . Esta condición ha sido demostrada por Kieu para el operador $H_A(t)$ [16, 17].

La evolución (24) tiene una estructura y comportamiento no computables por una MT, debido a que manipula operadores ∞ -dimensionales no compactos, es decir, operadores no acotados espectralmente. En otras palabras, la evolución (24) encierra la característica hipercomputacional del AK, la cual proviene de la mecánica cuántica.

3.4 El Criterio de Parada

Como fue mencionado, el AK emplea el criterio que para algún tiempo de evolución *finito* T se obtendrá con una buena probabilidad el autovector V_F asociado al autovalor más bajo de H_D . Debido al hecho de que el teorema adiabático no ofrece ninguna cuota superior para el tiempo de evolución T , es necesario establecer un criterio que permita determinar cuando ha sido alcanzado el tiempo de evolución T predicho por el teorema.

Para (1), el vector $V(t)$ en la evolución (24) tiene la forma

$$V(t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} C_{n_1 \dots n_k}(t) e_{n_1} \otimes \cdots \otimes e_{n_k}. \quad (27)$$

De forma similar a la distribución de probabilidad (12) asociada al vector (11), el vector $V(t)$ tiene asociada una distribución de probabilidad para la variables discretas n_1, \dots, n_k dada por

$$P_{n_1 \dots n_k}(V(t)) = |C_{n_1 \dots n_k}(t)|^2, \quad (28)$$

la cual representa la probabilidad de que los componentes del vector $V(t)$ indexados por la k -tupla n_1, \dots, n_k pertenezcan al autovector asociado al autovalor más bajo H_D ; y sea

$$P_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}(V(t)) = \max_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} P_{n_1 \dots n_k}(V(t)) \quad (29)$$

el valor máximo de estas probabilidades.

Con base en que $[H_I, H_D] \neq 0$, Kieu ha demostrado la validez del siguiente criterio para determinar el tiempo de evolución T para sistemas cuánticos 2-dimensionales [16], y posee fuerte evidencia teórica y numérica de la validez del criterio para el caso general [19]:

$$V_F \text{ es el autovector asociado al autovalor más bajo de } H_D \text{ si } P_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}(V_F) > 1/2, \quad (30)$$

siempre y cuando $P_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}(V_I) \leq 1/2$.

La elección del vector inicial V_I es consecuente con este criterio de parada puesto que de acuerdo a (13) se tiene que

$$P_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}(V_I) < (1/2)^k, \quad (31)$$

lo cual significa entonces que el vector inicial V_I no es el autovector asociado al autovalor más bajo H_D y es necesario emplear la evolución (24) para hallarlo.

3.5 El Algoritmo

Con base en los elementos presentados, la descripción del AK es la siguiente. Dada una ecuación Diofantina (1), mediante el proceso de codificación representado en la figura 3 se genera el operador codificante H_D y mediante el proceso de inicialización representado en la figura 4 se genera el operador inicial H_I y el vector inicial V_I . Los operadores H_D y H_I son conectados homotópicamente por un interpolador que produce el operador $H_A(t)$. Con el operador $H_A(t)$ se realiza una evolución desde el vector V_I hasta un vector V_F con un tiempo de evolución T arbitrario. Luego de esta evolución, se extrae la correspondiente distribución de probabilidad máxima $P_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}(V_F)$ para la variables discretas n_1, \dots, n_k . Si $P_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}(V_F) > 1/2$ entonces se determina si (1) tiene o no solución en \mathbb{N}^k de acuerdo al proceso de decodificación representado en la figura 3. Si $P_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}(V_F) \leq 1/2$, entonces se ejecuta de nuevo la evolución desde el vector V_I hasta un vector V_F con un tiempo de evolución T mayor.

En el contexto de la especificación del AK presentado por la figura 5, es necesario construir un invariante [25] para el ciclo presente en él. El vector V_I es un vector normalizado, lo cual significa de acuerdo a (27) y (25) que

$$\begin{aligned} \|V_I\| &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} |C_{n_1 \dots n_k}(0)|^2 \\ &= 1, \end{aligned} \quad (32)$$

y puesto que la evolución (24) es una unitaria, ella preserva la norma de los vectores y por lo tanto V_F es también un vector normalizado, es decir,

$$\begin{aligned} \|V_F\| &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} |C_{n_1 \dots n_k}(T)|^2 \\ &= 1. \end{aligned} \quad (33)$$

La propiedad P definida por

$$P = \text{ecuación (33)} \wedge \text{ecuación (26)} \quad (34)$$

constituye entonces el invariante para el ciclo comprendido entre las líneas 9 y 13 en la figura 5.

```

Entrada: Ecuación Diofantina  $D(x_1, \dots, x_k) = 0$ 
Salida: Determina si la ecuación  $D(x_1, \dots, x_k) = 0$  tiene o no solución en  $\mathbb{N}^k$ 
1 begin
2    $H_D \leftarrow$  Codificación( $D(x_1, \dots, x_k) = 0$ ) REM  $H_D = D(N_1, N_2, \dots, N_k)^2$ 
3    $V_I \leftarrow$  Inicialización( $k$ ) REM  $V_I = W_1 \otimes \dots \otimes W_k$ 
4    $H_I \leftarrow$  Inicialización( $k$ ) REM  $H_I = \sum_{j=1}^k (a_j^\dagger - w_j^* \mathbf{I})(a_j - w_j \mathbf{I})$ 
5    $T \leftarrow$  incremento
6    $H_A(t) \leftarrow (1 - \frac{t}{T}) H_I + (\frac{t}{T}) H_D$ 
7    $V_F \leftarrow$  Evolución( $H_A(t), T$ ) REM  $V_F = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} C_{n_1 \dots n_k}(T) e_{n_1} \otimes \dots \otimes e_{n_k}$ 
8    $P_{\text{máx}}(V_F) \leftarrow$  máx  $\{P_{n_1 \dots n_k}(V_F) \mid (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k\}$ 
   REM  $P_{n_1 \dots n_k}(V_F) = |C_{n_1 \dots n_k}(T)|^2$ 
9   while  $P_{\text{máx}}(V_F) \leq 1/2$  do
10     $T \leftarrow T +$  incremento
11     $H_A(t) \leftarrow (1 - \frac{t}{T}) H_I + (\frac{t}{T}) H_D$ 
12     $V_F \leftarrow$  Evolución( $H_A(t), T$ )
13     $P_{\text{máx}}(V_F) \leftarrow$  máx  $\{P_{n_1 \dots n_k}(V_F) \mid (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k\}$ 
14   if  $H_D V_F = 0$  then
15    return La ecuación  $D(x_1, \dots, x_k) = 0$  tiene solución en  $\mathbb{N}^k$ 
16   else
17    return La ecuación  $D(x_1, \dots, x_k) = 0$  no tiene solución en  $\mathbb{N}^k$ 
18 end

```

Fig. 5: Algoritmo hipercomputacional cuántico de Kieu

4 Adaptación del Algoritmo de Kieu al Álgebra $\mathfrak{su}(1, 1)$

De acuerdo a la presentación del AK realizada en la sección anterior, se observa que los procesos de codificación e inicialización, y el criterio de parada, dependen del álgebra dinámica asociada al oscilador armónico cuántico, es decir dependen del álgebra Weyl-Heisenberg; mientras que el proceso de evolución depende del teorema adiabático.

Un análisis del AK establece las siguientes propiedades del álgebra Weyl-Heisenberg empleadas en su construcción:

1. El álgebra es n -dimensional y tiene una representación ∞ -dimensional en el espacio generado por los vectores e_n dados por (4). Bajo esta representación el álgebra posee un operador de creación a^\dagger y un operador de aniquilación a , cuya representación matricial está dada por (5).
2. A partir de los generadores del álgebra se obtiene un operador número N cuya representación matricial es (8) y satisface la ecuación de autovectores y autovalores (7). Es decir, el conjunto de autovalores del operador N es igual al espacio de solución asociado al DPH.
3. El operador de aniquilación tiene como autovectores los vectores W dados por (11). Estos vectores tienen asociada una distribución de probabilidad $P_n(w)$ para la variable aleatoria n dada por (12).

4. A partir de los vectores W y de los operadores de creación y aniquilación es posible construir el operador inicial H_I dado por (19) y el vector inicial V_I dado por (18) que satisfacen la condición (22).
5. El vector inicial V_I satisface el criterio de parada (30), con base en la distribución de probabilidad $P_n(w)$ asociada a los vectores W .
6. El operador interpolante $H_A(t)$ dado por (23) satisface la condición (26), requerida para la aplicación del teorema adiabático.

Debido a que estas propiedades no son exclusivas del álgebra Weyl-Heisenberg, es posible realizar una adaptación del AK sobre un álgebra diferente que las satisfaga. Se presenta entonces un algoritmo *à la* Kieu construido sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$. Como fue mencionado en la introducción, la selección del álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$ está sustentada en el hecho que ella admite realizaciones en diferentes sistemas cuánticos, provenientes de diferentes áreas de la física.

El álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$ es un álgebra 3-dimensional cuyos generadores K_0, K_- y K_+ satisfacen las relaciones de conmutación

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_+, K_-] = -2K_0, \quad (35)$$

y cuyas representaciones ∞ -dimensionales sobre el espacio generado por los vectores e_n están dadas por [14]

$$K_- e_0 = 0, \quad (36)$$

$$K_- e_n = \sqrt{n(2\beta + n - 1)} e_{n-1}, \quad K_- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\beta} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2(2\beta + 1)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3(2\beta + 2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$K_+ e_n = \sqrt{(n+1)(2\beta + n)} e_{n+1}, \quad K_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{2\beta} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2(2\beta + 1)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3(2\beta + 2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$K_0 e_n = (n + \beta) e_n, \quad K_3 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 + \beta & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 + \beta & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (39)$$

donde K_- es el operador de aniquilación, K_+ es el operador de creación y $\beta > 0$ es un parámetro denominado índice Bargmann que depende de la realización del álgebra en cada sistema cuántico.

A partir del operador K_0 se construye un operador número $N^{\mathfrak{su}(1,1)}$ definido por

$$N^{\mathfrak{su}(1,1)} = K_0 - \beta \mathbb{1}, \quad (40)$$

que satisface la ecuación de autovalores y autovalores (7) y cuya representación matricial ∞ -dimensional está dada por (8).

Similarmente al caso del álgebra Weyl-Heisenberg, la ecuación de autovalores y autovectores para el operador de aniquilación K_- para $w \in \mathbb{C}$ es

$$K_- W^{\text{su}(1,1)} = w W^{\text{su}(1,1)}, \quad (41)$$

cuya solución normalizada es [35]

$$W^{\text{su}(1,1)} = \sqrt{\frac{|w|^{2\beta-1}}{I_{2\beta-1}(2|w|)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\sqrt{n! \Gamma(n+2\beta)}}, \quad (42)$$

donde $I_\nu(x)$ es la función modificada de Bessel de primera clase. La distribución de probabilidad para la variable aleatoria discreta n correspondiente a los vectores $W^{\text{su}(1,1)}$ es

$$P_n^{\text{su}(1,1)}(w, \beta) = \frac{|w|^{2\beta-1}}{I_{2\beta-1}(2|w|)} \frac{|w|^{2n}}{n! \Gamma(n+2\beta)}, \quad (43)$$

y dado que

$$P_{n+1}^{\text{su}(1,1)}(w, \beta) / P_n^{\text{su}(1,1)}(w, \beta) = \frac{|w|^2}{(n+1)(n+2\beta)}, \quad (44)$$

se obtiene que $P_n^{\text{su}(1,1)}(w, \beta) > P_{n+1}^{\text{su}(1,1)}(w, \beta)$ cuando

$$|w|^2 < 2\beta, \quad (45)$$

y por lo tanto, para un β fijo establecido por el sistema cuántico, existen infinitos valores w que satisfacen las propiedades (13) y (45). La figura 6 ilustra para $\beta = 3/2$ que los valores $1,5 \lesssim w < \sqrt{3}$ satisfacen las propiedades (13) y (45).

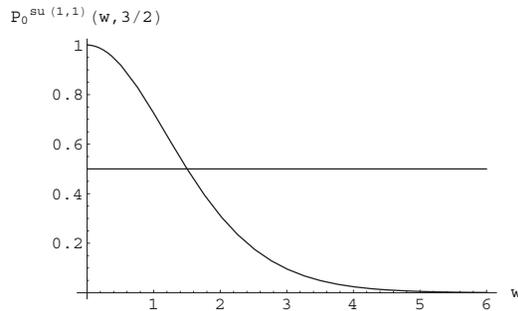


Fig. 6. Distribución de probabilidad para $P_0^{\text{su}(1,1)}(w, 3/2)$

Para una ecuación Diofantina (1), con base en los elementos presentados y a partir de (14), (18) y (19), el operador codificante $H_D^{\text{su}(1,1)}$, el operador inicial $H_I^{\text{su}(1,1)}$ y el vector inicial $V_I^{\text{su}(1,1)}$, empleados por la adaptación del AK sobre el álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$ están dados por

$$\begin{aligned} H_D^{\text{su}(1,1)} &= D \left(N_1^{\text{su}(1,1)}, N_2^{\text{su}(1,1)}, \dots, N_k^{\text{su}(1,1)} \right)^2, \\ H_I^{\text{su}(1,1)} &= \sum_{j=1}^k (K_{+j} - w_j^* \mathbb{I})(K_{-j} - w_j \mathbb{I}), \\ V_I^{\text{su}(1,1)} &= W_1^{\text{su}(1,1)} \otimes \dots \otimes W_k^{\text{su}(1,1)}. \end{aligned} \quad (46)$$

No es necesario ninguna modificación adicional al AK desde el punto de vista algebraico debido a que los elementos presentados en (46) son los únicos dependientes del álgebra dinámica empleada. Debido a que $[H_I^{\mathfrak{su}(1,1)}, H_D^{\mathfrak{su}(1,1)}] \neq 0$, la demostración realizada por Kieu para establecer el criterio (30) es válida para el álgebra $\mathfrak{su}(1, 1)$. Por otra parte, es posible adaptar la demostración de Kieu de la existencia de la separación bien definida entre los autovalores del operador interpolante $H_A(t)$ del álgebra Weyl-Heisenberg, al nuevo operador interpolante del álgebra $\mathfrak{su}(1, 1)$ dado por

$$H_A^{\mathfrak{su}(1,1)}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) H_I^{\mathfrak{su}(1,1)} + \left(\frac{t}{T}\right) H_D^{\mathfrak{su}(1,1)}, \quad (47)$$

de donde se sigue que la aplicación del teorema adiabático sobre este nuevo operador es válida. Además, el nuevo operador inicial $H_I^{\mathfrak{su}(1,1)}$ y el nuevo vector inicial $V_I^{\mathfrak{su}(1,1)}$ satisfacen la condición (22), y el vector $V_I^{\mathfrak{su}(1,1)}$ satisface el criterio de parada (30) debido a que para un β fijo

$$P_{\text{máx}}^{\mathfrak{su}(1,1)} \left(V_I^{\mathfrak{su}(1,1)}, \beta \right) < (1/2)^k, \quad (48)$$

para los infinitos valores w que satisfacen las propiedades (13) y (45).

Reemplazando las líneas 2 a 4 en la figura 5 por los nuevos elementos presentados en (46) y continuando el procesamiento del algoritmo, se obtiene el algoritmo *à la* Kieu sobre el álgebra $\mathfrak{su}(1, 1)$. Como caso particular de esta adaptación, para el valor $\beta = 3/2$, se obtiene la adaptación del AK sobre la caja de potencial infinita realizada previamente por los autores [30, 28].

5 Conclusiones

Debido a la existencia de modelos de hipercomputación tales como las máquinas de Turing con oráculos, las máquinas de Turing aceleradas y las redes neuronales recurrentes análogas, entre otros, los cuales resuelven en principio un problema incomputable por una máquina de Turing; la hipercomputación teórica existe. Sin embargo, la posibilidad de implementar algún modelo teórico de hipercomputación es un problema abierto. La diferencia establecida por la hipercomputación entre los términos ‘computable’ y ‘computable por una máquina de Turing’ produce una ruptura con el paradigma establecido. La concreción de esta ruptura a partir de la implementación de un modelo de hipercomputación eficiente, tendría consecuencias de mayor alcance tanto a nivel teórico como como a nivel práctico, que las generadas por los resultados de incomputabilidad obtenidos para la computabilidad de las máquinas de Turing.

En el contexto dado por la dupla (computación cuántica estándar, complejidad algorítmica), ante la pregunta de por qué existen tan pocos algoritmos cuánticos conocidos que ofrecen una mejora respecto a los algoritmos clásicos, una de las posibles razones expuestas por Shor es que “*quantum computers operate in a manner so different from classical computers that our techniques for designing algorithms and our intuitions for understanding the process of computation no longer work*” [27, p. 88]. Si se modifica el contexto por la nueva dupla (computación cuántica, computabilidad), y debido a la existencia del algoritmo hipercomputacional cuántico de Kieu y debido a la adaptación realizada de este algoritmo sobre el álgebra $\mathfrak{su}(1, 1)$, tanto la pregunta como su respuesta continúan siendo válidas, quizás aún más válidas.

El análisis realizado al AK establece que su poder hipercomputacional está sustentado en tres

características: (i) Resuelve el décimo problema de Hilbert, el cual es un problema incomputable por una máquina de Turing, pero es un problema finitamente refutable, (ii) El empleo del teorema adiabático de la mecánica cuántica sobre operadores ∞ -dimensionales y (iii) Ciertas propiedades del álgebra dinámica Weyl-Heisenberg asociada al oscilador armónico cuántico.

La adaptación realizada del AK sobre al álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$ es una adaptación algebraica, es decir, mantiene las características (i) y (ii) y modifica la característica (iii) del algoritmo. Esta adaptación establece que las propiedades algebraicas requeridas por el AK no son exclusivas del álgebra Weyl-Heisenberg. La elección de un álgebra dinámica diferente a la empleada por Kieu para su algoritmo, genera en principio diferentes posibilidades de análisis de implementación sustentadas en cada uno de los sistemas cuánticos que realizan el álgebra seleccionada, los cuales para el álgebra $\mathfrak{su}(1, 1)$ son la caja de potencial infinita, los potenciales Pöschl-Teller, sistemas ópticos de uno, dos o cuatros modos de fotones, entre otros.

6 Agradecimientos

Los autores agradecen especialmente al profesor Tien D. Kieu por las útiles discusiones sostenidas y la retroalimentación recibida. El primer autor desea agradecer la gentil hospitalidad con que fue acogido durante su visita al profesor Kieu en el *Centre for Atom Optics and Ultrafast Spectroscopy (CAOUS)* de la *Swinburne University of Technology*, Melbourne, Australia. Los autores también desean agradecer las acertadas correcciones, sugerencias y observaciones realizadas por los evaluadores anónimos y el comité editorial de la Revista Colombiana de Computación, sobre versiones preliminares de este artículo. Esta investigación ha sido soportada por Colciencias-EAFIT, contrato # 1216-05-13576.

Referencias

- [1] J. P. ANTOINE ET AL. Temporally stable coherent states for infinite well and Pöschl-Teller potentials. *J. Math. Phys.* **42**(6), 2349–2387 (2001).
- [2] J. E. AVRON Y A. ELGART. Adiabatic theorem without a gap condition. *Commun. Math. Phys.* **203**(2), 444–463 (1999).
- [3] L. BLUM ET AL. “Complexity and real computation”. New York: Springer-Verlag (1998).
- [4] V. V. BORZOV Y E. V. DAMASKINSKY. Generalized coherent states for classical orthogonal polynomials. En V. S. BULDYREV ET AL, editores, “Proceedings of the International Seminar “Day on Diffraction’02””, págs. 47–53. IEEE Computer Society Press (2002).
- [5] M. BRAVERMAN Y S. COOK. Computing over the reals: Foundations for scientific computing. *Notices of the AMS* **53**(3), 318–329 (2006).
- [6] C. S. CALUDE. “Information and Randomness: An Algorithmic Perspective”. Springer, 2nd ed. (2002).
- [7] I. L. CHUANG Y M. A. NIELSEN. “Quantum Computation and Quantum Information”. Cambridge: Cambridge University Press (2000).
- [8] S. B. COOPER. “Computability theory”. London: Chapman & Hall (2003).

- [9] B. J. COPELAND. Hypercomputation. *Minds and Machines* **12**, 461–502 (2002).
- [10] B. J. COPELAND Y D. PROUDFOOT. Alan Turing’s forgotten ideas in computer science. *Scientific American* **280**(4), 76–81 (1999).
- [11] D. DEUTSCH. Frequently Asked Questions about Quantum Computation. www.qubit.org/library/QuantumComputationFAQ.html, Septiembre, 2001.
- [12] D. DEUTSCH. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A* **400**, 97–117 (1985).
- [13] E. FARHI ET AL. A quantum adiabatic evolution algorithm applied to random instances of NP-complete problem. *Science* **292**, 472–476 (2001).
- [14] H.-S. FU Y R. SASAKI. Exponential and Laguerre squeezed states for $su(1,1)$ algebra and the Calogero-Sutherland model. *Phys. Rev. A* **53**(6), 3836–3844 (1996).
- [15] A. HODGES. Can quantum computing solve classically unsolvable problems? Preprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0512248 (2005).
- [16] T. D. KIEU. Quantum adiabatic algorithm for Hilbert’s tenth problem: I. The algorithm. Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0310052 v2 (2003).
- [17] T. D. KIEU. A reformulation of Hilbert’s tenth problem through quantum mechanics. *Proc. R. Soc. Lond. A* **460**, 1535–1545 (2004).
- [18] T. D. KIEU. An anatomy of a quantum adiabatic algorithm that transcends the Turing computability. *International Journal of Quantum Computation* **3**(1), 177–182 (2005).
- [19] T. D. KIEU. Hypercomputability of quantum adiabatic processes: Fact versus prejudices. Invited paper for a special issue of the Journal of Applied Mathematics and Computation on Hypercomputation. Preprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0504101 (2005).
- [20] T. D. KIEU. On the identification of the ground state based on occupation probabilities: An investigation of Smith’s apparent counterexample. Preprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0602145 (2006).
- [21] T. D. KIEU. Reply to Andrew Hodges. Preprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0602214 v2 (2006).
- [22] Y. V. MATIYASEVICH. “Hilbert’s tenth problem”. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press (1993).
- [23] A. MESSIAH. “Quantum mechanics”, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1990).
- [24] T. ORD Y T. D. KIEU. Using biased coins as oracles. Preprint: arxiv.org/abs/cs.OH/0401019 (2004).
- [25] R. PEÑA-MARÍ. “Diseño de Programas. Formalismo y Abstracción”. Madrid: Pearson Educación, 3a ed. (2005).
- [26] T. PHEIDAS Y K. ZAHIDI. Undecidability of existential theories of rings and fields: A survey. En J. DENEFF ET AL, editores, “Hilbert’s Tenth Problem: Relations with Arithmetic and Algebraic Geometry”, vol. 270 de “Contemporary Mathematics”, págs. 49–106. American Mathematical Society (2000).
- [27] P. W. SHOR. Why haven’t more quantum algorithms been found? *Journal of the ACM* **50**(1), 87–90 (2003).

- [28] A. SICARD, J. OSPINA Y M. VÉLEZ. Numerical simulations of a possible hypercomputational quantum algorithm. En B. RIBEIRO ET AL, editores, “Adaptive and Natural Computing Algorithms. Proc. of the International Conference in Coimbra, Portugal”, págs. 272–275. SpringerWienNewYork (21st - 23rd March 2005).
- [29] A. SICARD Y M. VÉLEZ. Hipercomputación: La próxima generación de la computación teórica. *Revista Universidad EAFIT* **123**, 47–51 (2001).
- [30] A. SICARD, M. VÉLEZ Y J. OSPINA. A possible hypercomputational quantum algorithm. En E. J. DONKOR, A. R. PIRICH Y H. E. BRANDT, editores, “Quantum Information and Computation III”, vol. 5815 de “Proc. of SPIE”, págs. 219–226. SPIE, Bellingham, WA (2005).
- [31] W. D. SMITH. Three counterexamples refuting Kieu’s plan for “quantum hypercomputation”; and some uncomputable quantum mechanical tasks. Accepted for publication in Applied Mathematics and Computation. Available online 3 March (2006).
- [32] R. SRIKANTH. Computable functions, the Church-Turing thesis and the quantum measurement problem. Preprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0402128 (2004).
- [33] M. STANNETT. Hypercomputation models. En C. TEUSCHER, editor, “Alan Turing: life and legacy of a great thinker”, págs. 135–157. Berlin: Springer (2003).
- [34] B. TSIRELSON. The quantum algorithm of Kieu does not solve the Hilbert’s tenth problem. Preprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0111009 (2001).
- [35] X.-G. WANG. Coherent states, displaced number states and Laguerre polynomial states for $su(1, 1)$ Lie algebra. *Int. J. Mod. Phys. B* **14**(10), 1093–1104 (2000).
- [36] K. WEIHRAUCH. “Computable Analysis: An Introduction”. Berlin: Springer-Verlag (2000).