Compuerta de fase: construcción geométrica desde un haz fibrado principal (versión larga)

Mario E. Vélez Ruiz   Andrés Sicard Ramírez

Grupo de Lógica y Computación
Escuela de Ciencias y Humanidades
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia S.A.

Resumen

Se realiza una descripción físico-matemática de la computación cuántica geométrica abeliana a partir de la noción de haz fibrado principal. Se construye la conexión del fibrado apelando a la noción de *pull-back* sobre una variedad suave llamada espacio paramétrico. De los parámetros del espacio paramétrico depende el hamiltoniano del sistema. De la evolución adiabática realizada por los autoestados (qubits) del hamiltoniano se construye una compuerta de fase geométrica (fase abeliana).

PACS : 03,65. $-w$, 03,67.Lx, 03,65.Bz

1. Computación cuántica

Diferentes modelos formales de computación fueron establecidos en la decada de los 30's, en particular, el modelo denominado “máquina de Turing”, construido por Alan Turing [17, 25] en 1936, fue el modelo de computación clásica en el cual se basó el primer modelo de computación cuántica denominado “máquina de Turing cuántica”, construido por David Deutsch [4] en 1985. Es decir, hubo la necesidad de esperar cinco decadas para contar con este modelo; sin embargo, durante este lapso de tiempo fueron establecidos resultados importantes que posibilitaron la construcción del mismo. Resultados tales como, la observación de que cualquier computación puede llevarse a cabo como una computación reversible, realizada por Charles Bennet [1] en 1973; la construcción de compuertas universales reversibles, realizada por Edward Fredkin y Tommaso Toffoli [8] en 1982; y los trabajos pioneros en modelos de computación cuántica, realizados por Richard Feynmann [7] en 1982 y 1985.

A partir de las construcciones y resultados anteriores, se establece la equipotencia entre los diferentes modelos de computación subyacentes, es decir, los modelos de computación clásica, probabilista, reversible o cuántica, computan los mismos objetos Turing-computables. Por otra parte, una vez establecido el modelo de computación cuántica, surge un modelo cuántico equivalente denominado “circuitos cuánticos” propuesto por Deutsch [5] en 1989 y comienza la busqueda inicial de algoritmos y propuestas de implementación para la computación cuántica.

En relación con los algoritmos cuánticos, quizás no sea exagerado afirmar que fue el algoritmo propuesto por Peter Shor [21, 22] en 1994, quien situó a la computación cuántica en el lugar que hoy se encuentra. La complejidad algorítmica temporal asociada a este algoritmo, diseñado para factorizar un número es sus factores primos, establece una "ruptura" en términos de complejidad algorítmica con su contraparte clásico, es decir, mientras el mejor algoritmo clásico para el problema en cuestión es de complejidad temporal exponencial, el algoritmo propuesto por Shor es de complejidad temporal polinomial. Esta situación establece que —por lo menos desde la perspectiva teórica— mientras un computador clásico necesita alrededor de $4{,}5 \times 10^{25}$ años para factorizar un número de 1000 dígitos, un computador cuántico para realizar la misma tarea necesita alrededor de 3,07 días.

En relación con las propuestas de implementación para la computación cuántica, es necesario mencionar que no hay consenso sobre la posibilidad o imposibilidad de las mismas debido al fénomeno de la decoherencia para sistema físicos de determinado número de elementos. Sin embargo, un alto porcentaje de la investigación actual en computación cuántica —apoyada por grandes inversiones en dinero tanto gubernamentales como privadas— tiene como objetivo la construcción de máquinas cuánticas. Se han realizado propuestas de implementación desde diferentes perspectivas tales como, óptica cuántica [2], resonancia nuclear magnética [18], computador cuántico atómico [26] e íones atrapados [3], entre otras. Quizás uno de los logros más importante en está dirección —al momento de escribir este artículo— es el computador cuántico de cinco qubits construido por IBM y la universidad Stanford [24].

2. Computación cuántica geométrica

En el marco de los desarrollos teóricos actuales, se abre camino la computación cuántica geométrica [13, 9, 10, 11, 12, 14, 28], su fundamento reside en las recientes formulaciones geométricas de la computación cuántica, se nutre de los efectos físicos que se obtienen en la mecánica cuántica, en particular, el modelo de dos estados del espín (o cualquier otro sistema de dos estados) es un modelo de uso corriente en la computación cuántica. La superposición de estados de espín, recibe el nombre de "qubit". La dinámica del sistema (computador), se rige por la ecuación determinista de Schrödinger, cuya solución conduce a un operador de evolución, el cual es unitario, éste a su vez se identifica con las compuertas lógico-cuánticas constituyentes de los circuitos cuánticos. Los algoritmos de la computación cuántica son secuencias de operadores unitarios de evolución que operan sistemáticamente durante intervalos de tiempos finitos. Las secuencias de operadores reciben un n-qubit de información a la entrada y arrojan como resultado un n-qubit a la salida, este último ha de ser colapsado a un estado de la base, para ofrecer alguna medida probabilista.

La computación cuántica geométrica se nutre de los efectos inherentes a las propiedades geométricas de los espacios en los que se formula la mecánica cuántica. Hay una extensa lista de efectos cuánticos formulados a partir de las propiedades topológicas y geométricas subyacentes a espacios donde se configura un sistema particular, de todos ellos se destaca, el de la fase de Berry [20], cuya formulación permite derivar una expresión para la holonomía abeliana $U(1)$, la cual es invariante *gauge* y no depende del Hamiltoniano, su origen es solamente geométrico. La generalización al caso no abeliano, conduce a la formulación de la computación cuántica geométrica con simetría $U(n)$. En los casos abeliano y no abeliano, el problema consiste en que, una vez se halla realizado la formulación de los haces fibrados correspondientes en cada caso, se procede a realizar evoluciones cíclicas de elementos del haz fibrado, sujetas a la verificación del teorema adiabático [15]. La evolución lleva asociada la noción de transporte paralelo, asociado a una conexión particular, la cual resulta ser el campo *gauge*. El grupo de holonomía resultante de la evolución cíclica es el grupo unitario $U(1)$ para el caso abeliano y $U(n)$ para el caso no abeliano. Las compuertas lógico-cuánticas se han de obtener con ciclos correctamente formulados.

3. Computación cuántica geomérica abeliana

Los estados puros $|\,\psi\rangle$ en la mecánica cuántica, corrientemente se describen como clases de equivalencia de estados módulo una fase de la forma $e^{\imath\phi}$, donde $\phi \in [0, 2\pi)$. Matemáticamente los estados puros están en una correspondencia uno a uno con los elementos del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^{N-1}$. En este contexto la computación cuántica geométrica abeliana se puede formular sobre la base del haz fibrado principal $\{U(1), \mathbb{H}_N, \Pi, \mathbb{C}P^{N-1}\}$ donde $\mathbb{H}_N$ es el espacio total, $\mathbb{C}P^{N-1}$ es el espacio base, $U(1)$ es la fibra y Π es la proyección. Formalmente la situación es como sigue.

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert finito e isomorfo a $\mathbb{C}^N$. Se define

$$\mathbb{H}_N = \{|\,\psi\rangle \in \mathbb{H}|\,\langle\psi\,|\,\psi\rangle = 1\}, \tag{1}$$

como la esfera unitaria en $\mathbb{H}$. La restricción en la ecuación (1) implica la condición de ortonormalidad para los estados de la base elegida de $\mathbb{H}_N$, $\langle\varphi_i\,|\,\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$ y la suma de los módulos al cuadrado de los coeficientes de la combinación es igual a uno. Se define el espacio complejo proyectivo $\mathbb{C}P^{N-1}$, como el conjunto de todos los rayos que atraviesan el origen de coordenadas en $\mathbb{H}_N$. El espacio $\mathbb{C}P^{N-1}$ tiene estructura de variedad diferenciable. Existe una función canónica llamada la proyección la cual actúa de $\mathbb{H}_N$ en $\mathbb{C}P^{N-1}$ y está definida por

$$\begin{aligned} \Pi\colon \mathbb{H}_N &\to \mathbb{C}P^{N-1} \\ |\,\psi\rangle &\mapsto |\,\psi\rangle\langle\psi\,|\,. \end{aligned} \tag{2}$$

En la ecuación (2), $\langle\psi\,|$ es un elemento del espacio $\mathbb{H}_N^*$ dual de $\mathbb{H}_N$. Se define $P = \Pi(|\,\psi\rangle)$. P satisface las condiciones $P^2 = P, P = P^\dagger$ y $\mathrm{tr}P = 1$. Una acción a derecha del grupo de Lie $U(1)$ sobre $\mathbb{H}_N$ se define como

$$\begin{aligned} \sigma\colon \mathbb{H}_N \times U(1) &\to \mathbb{H}_N \\ (|\,\psi\rangle\,, e^{\imath\phi}) &\mapsto |\,\psi\rangle\, e^{\imath\phi}, \end{aligned} \tag{3}$$

donde ϕ es un parámetro complejo que varia entre $(0, 2\pi]$. La acción a derecha de $U(1)$ sobre $\mathbb{H}_N$ coincide con la acción a izquierda. La proyección es compatible con la acción a derecha de $U(1)$ sobre $\mathbb{H}_N$ puesto que

$$\Pi(|\,\psi\rangle\, e^{\imath\phi}) = \Pi(|\,\psi\rangle) = |\,\psi\rangle\langle\psi\,|\,. \tag{4}$$

Por cada proyector P existe un subespacio unidimensional de $\mathbb{H}_N$ dado por el rayo al cual es proyectado el estado, además por cada subespacio unidimensional existe un proyector. Se identifica en adelante los subespacios unidimensionales de $\mathbb{H}_N$ con sus respectivos proyectores, dicha identificación permite definir la variedad $\mathbb{C}P^{N-1}$ como [19, 13]

$$\mathbb{C}P^{N-1} = \{P \in M(N, \mathbb{C}) \mid P^2 = P,\ P^\dagger = P,\ \mathrm{tr}P = 1\}. \tag{5}$$

donde $M(N,\mathbb{C})$ son matrices $N \times N$ con entradas complejas.

Con el fin de realizar el transporte paralelo de vectores sobre el haz fibrado principal y con el fin de definir una conexión asociada a ese transporte, se realiza la siguiente parametrización. Sea M una variedad suave llamada el espacio paramétrico, sobre ella se define la siguiente función

$$\begin{aligned} \zeta\colon M &\to \mathbb{C}P^{N-1} \\ \lambda &\mapsto \Pi(|\,\psi\rangle_\lambda). \end{aligned} \tag{6}$$

Se define una nueva variedad E, parametrizada por los elementos de M

$$E = \{(\lambda, |\,\psi\rangle_\lambda) \in M \times \mathbb{H}_N \mid \zeta(\lambda) = \Pi(|\,\psi\rangle_\lambda). \tag{7}$$

Una nueva proyección de E en M se define como

$$\begin{aligned} \Pi_E\colon E &\to M \\ (\lambda, |\,\psi\rangle_\lambda) &\mapsto \lambda. \end{aligned} \tag{8}$$

El conjunto $\{U(1), E, \Pi_E, M\}$ define un nuevo haz fibrado principal ζ^* llamado el *pull-back* sobre M dado por

$$\zeta^*(U(1), \mathbb{H}_N, \Pi, \mathbb{C}P^{N-1}) = \{U(1), E, \Pi_E, M\}. \tag{9}$$

La proyección Π_E es compatible con $U(1)$ puesto que

$$\Pi_E((\lambda, |\,\psi\rangle_\lambda\, e^{\imath\phi})) = \Pi_E((\lambda, |\,\psi\rangle_\lambda)). \tag{10}$$

Una sección s del *pull-back* sobre M puede ser construida de la siguiente manera sobre un abierto U de M

$$\begin{aligned} s\colon U &\to E \\ \lambda &\to s(\lambda) = (\lambda, |\,\psi\rangle_\lambda), \end{aligned} \tag{11}$$

además satisfacen $\Pi_E \circ s = id_M$. Se define una curva sobre E como $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to E$ tal que $\tilde{\gamma}(t) = s(\lambda(t)) = (\lambda \circ s)(t) = (\lambda(t), |\,\psi(t)\rangle_\lambda)$, donde $0 \leq t \leq 1$. Un vector tangente a la curva $\tilde{\gamma}(t) \in E$ está dado por

$$|\,\xi\rangle = \frac{d}{dt}\,|\,\psi(t)\rangle_\lambda\,. \tag{12}$$

Una conexión puede ser definida si se especifica una 1-forma conexión sobre el espacio tangente TE_t de E. La 1-forma conexión está dada por

$$\begin{aligned} A_t\colon TE_t &\to \mathbb{C} \\ |\,\xi\rangle &\mapsto_\lambda \langle\psi(t)\,|\,\xi\rangle\,. \end{aligned} \tag{13}$$

La ecuación (13) es la conexión canónica del fibrado principal $\{U(1), E, \Pi_E, M\}$ definida sobre U, en la cual A_t proyecta un vector $|\,\xi\rangle \in TE_t$ al subespacio vertical VE_t [19].

Si se define $A(\lambda) = A_t dt$ y se reemplaza la ecuación (12) en la expresión (13), la 1-forma conexión —campo *gauge*— se expresa mediante

$$A(\lambda) = {}_{\lambda}\langle \psi \,|\, d \,|\, \psi \rangle_{\lambda}\,. \tag{14}$$

Si λ^{μ} son coordenadas locales de M, d es una 1-forma diferencial sobre M dada por

$$d = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial \lambda^{\mu}} d\lambda^{\mu}. \tag{15}$$

$A(\lambda)$ es una 1-forma conexión la cual puede expresarse en términos de las coordenadas locales de M como $A_{\mu} d\lambda^{\mu}$. Reemplazando (15) en (14) después de expresar a $A(\lambda)$ en función de sus coordenadas locales, se obtiene

$$A_{\mu}(\lambda) = {}_{\lambda}\langle \psi \,|\, \frac{\partial}{\partial \lambda^{\mu}} \,|\, \psi \rangle_{\lambda}\,. \tag{16}$$

La ecuación (16) representa las componentes de la 1-forma conexión, es decir las componentes del campo *gauge*.

La acción a derecha del grupo de Lie $U(1)$ definida en (3) es compatible también con la proyección definida en (8) puesto que

$$\Pi_E((\lambda, g \,|\, \psi \rangle_{\lambda})) = \lambda, \tag{17}$$

donde $g \in U(1)$. Un cambio de coordenadas en la fibra es inducido mediante la acción del grupo de Lie $U(1)$ y la sección s definida en (11), lo que induce una transformación *gauge* de la forma

$$A'_t(\lambda) = {}_{\lambda}\langle \psi \,|\, g^{\dagger} \frac{d}{dt} g \,|\, \psi \rangle_{\lambda}\,, \tag{18}$$

después de realizar la derivada en (18) y usar la relación de ortonormalidad para $|\,\psi\rangle_{\lambda}$, se obtiene

$$A'_{\mu}(\lambda) = A_{\mu} + i \frac{\partial}{\partial \lambda^{\mu}} \phi(\lambda). \tag{19}$$

La expresión (19) es una transformación *gauge*.

Se considera un ciclo $\gamma \colon [0, \tau] \to M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(\tau)$ en el espacio base. Un *horizontal lift* se define como un ciclo en E, $\tilde{\gamma} \colon [0, \tau] \to E$, tal que $\Pi_E(\tilde{\gamma}) = \gamma$ de tal forma que un vector tangente a $\tilde{\gamma}(t)$ siempre pertenece al subespacio horizontal $H_{\tilde{\gamma}(t)} P \in TE_t$, es decir, tal que $A_t(|\,\xi\rangle) = 0$. Esta condición define el transporte paralelo de $|\,\xi\rangle$ a lo largo de $\tilde{\gamma}(t)$.

Sea $\hat{H}(\lambda) \colon \mathbb{H}_N \to \mathbb{H}_N$ una familia de operadores hamiltonianos dependiente del parámetro λ los cuales actúan sobre el espacio de Hilbert $\mathbb{H}_N$.

Los autoestados normalizados del hamiltoniano satisfacen

$$\hat{H}(\lambda) \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_{\lambda} = E_n(\lambda) \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_{\lambda}. \tag{20}$$

La ecuación de Schrödinger

$$\imath\hbar \frac{d}{dt} \,|\, \psi(t) \rangle_{\lambda} = \hat{H}(\lambda) \,|\, \psi(t) \rangle_{\lambda}\,, \tag{21}$$

determina la evolución temporal $U \colon \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_{\lambda} \to |\, \psi(t) \rangle_{\lambda}$ a través de $\tilde{\gamma}(t)$ en el espacio total E.

Si el hamiltoniano $\hat{H}(\lambda)$ evoluciona adiabaticamente [15], en una trayectoria cerrada $\gamma(t) \in M$, la aproximación adiabática permite escribir la siguiente solución para la ecuación de Schrödinger [23, 19]

$$\left| \psi(t) \right\rangle_\lambda = \exp\{\imath\Gamma(t)\} \exp\{\imath\beta(t)\} \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_\lambda , \tag{22}$$

donde $\Gamma(t) = -\hbar \int_o^t E_n(t)dt$ es la fase dinámica, mientras que $\beta(t)$ es la fase geométrica (fase de Berry). Para prescindir de la fase dinámica por conveniencia respecto a la exposición que aquí se plantea, y sin perdida de generalidad, se redefine el hamiltoniano como $\hat{\mathrm{H}} = \hat{H}(\lambda) - E_n(\lambda)$ lo cual implica que

$$\hat{\mathrm{H}} \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_\lambda = 0, \tag{23}$$

es decir, $\left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_\lambda$ es el autoestado de energía cero ($E_n = 0$) de $\hat{\mathrm{H}}$. Por lo tanto, la solución de la ecuación de Schrödinger modificada

$$\imath\hbar \frac{d}{dt} \left| \psi(t) \right\rangle_\lambda = \hat{\mathrm{H}}(\lambda) \left| \psi(t) \right\rangle_\lambda , \tag{24}$$

toma la forma

$$\left| \psi(t) \right\rangle_\lambda = \exp\{\imath\beta(t)\} \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_\lambda . \tag{25}$$

Dada la curva $\gamma(t) \in M$ y $\left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_\lambda$ un autoestado de energía cero ($E_n = 0$) de $\hat{\mathrm{H}}(\lambda)$ el límite adiabático

$${}_\lambda \left\langle \tilde{\psi}(t) \right| \frac{d}{dt} \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_\lambda = 0, \tag{26}$$

produce un modo de transportar paralelamente $\left| \psi(t) \right\rangle_\lambda$ a lo largo de la curva $\gamma(t)$, es decir, permite definir una conexión $A(\lambda) = {}_\lambda \left\langle \tilde{\psi}(t) \right| d \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_\lambda$ que justamente es la misma conexión asociada al fibrado principal $\{U(1), E, \Pi_E, M\}$.

Si se escribe el *horizontal lift* $\tilde{\gamma}(t)$ como

$$\tilde{\gamma}(t) = g(t)s(\lambda(t)) = (\lambda, g(t) \left| \tilde{\psi} \right\rangle_\lambda), \tag{27}$$

la condición (26) para el transporte paralelo toma la forma

$${}_\lambda \left\langle \tilde{\psi}(t) \right| g(t)^{-1} \frac{d}{dt} g(t) \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_\lambda = 0, \tag{28}$$

la cual es equivalente a

$$g(t)^{-1} \frac{dg(t)}{dt} = -A_t \left| \xi \right\rangle = -{}_\lambda \left\langle \tilde{\psi}(t) \right| \frac{d}{dt} \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_\lambda . \tag{29}$$

Si se sustituye la solución de la ecuación de Schrödinger modificada, ecuación (25), en la ecuación (29) y se considera que $\beta(0) = 0$, además de que $g(t) = \exp \imath\beta(t)$, se obtiene

$$\beta(t) = \imath \int_0^t {}_\lambda \left\langle \tilde{\psi}(t) \right| \frac{d}{dt} \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle_\lambda dt. \tag{30}$$

El integrando de la ecuación (30) es la 1-forma conexión definida en (14), al reemplazar ésta en la ecuación (30) se obtiene

$$\beta(t) = \imath \oint_\gamma A(\lambda). \tag{31}$$

La exponencial de la expresión (31) es la holonomia $U(1)$, es invariante *gauge* y no depende del Hamiltoniano $\hat{H}$, su origen es puramente geométrico.

4. Compuertas cuánticas

Como una aplicación del formalismo anterior para el caso del escenario geométrico y la compuerta de fase asociada al qubit, se construye un modelo de computación cuántica geométrica en el cual $\{U(1), \mathbb{H}_2, \Pi, \mathbb{C}P\}$ es un fibrado principal, donde $\mathbb{C}P$ es el espacio base, $\mathbb{H}_2$ es el espacio total, $U(1)$ es la fibra típica y Π es la proyección. La conexión es el ingrediente fundamental para la construcción de la compuerta geométrica de fase abeliana, ella se construye a partir del *pull-back* sobre $M = S^2$ del fibrado principal. El *pull-back* sobre la 2-esfera S^2 esta definido por $\{U(1), E, \Pi_E, S^2\}$ donde $E = S^2 \times \mathbb{H}_2$ es el espacio total, $U(1)$ es la fibra típica, Π_E dada en la ecuación (8) es la proyección y S^2 es el espacio de parámetros de los cuales depende el hamiltoniano

$$\hat{H}(\boldsymbol{\lambda}) = \epsilon \boldsymbol{\lambda} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{32}$$

donde ϵ es la energía asociada a la interacción, $\boldsymbol{\lambda}$ es un vector del espacio paramétrico, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ es el operador vector definido para las matrices de Pauli. El hamiltoniano (32) describe la interacción entre una partícula de espín 1/2 y el campo magnético $\boldsymbol{\lambda}(t)$. El campo magnético consiste de dos componentes $\lambda_x(t)$ y $\lambda_y(t)$ las cuales son perturbaciones típicamente oscilantes y una tercera componente $\lambda_z(t)$ la cual está descrita por un campo magnético constante. En general la perturbación es periódica y las componentes del campo magnético $\boldsymbol{\lambda}(t)$ están definidas por las ecuaciones

$$\lambda_x(t) = B\cos(\omega t + \phi), \qquad \lambda_y(t) = B\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi), \qquad \lambda_z(t) = B_0, \tag{33}$$

donde $B_0/2\pi$ es la frecuencia de transición del sistema, ω es la frecuencia con la cual oscilan las componentes x, y del campo magnético, B es la amplitud del campo oscilante y ϕ es la fase inicial; en un sistema de referencia en el cual el vector de Bloch rota a frecuencia ω alrededor del eje z (aproximación de onda rotante). Para encontrar la fase de Berry asociada al autoestado (qubit) del hamiltoniano (32) y su correspondiente compuerta de fase abelina es más conveniente transformar el campo magnético dependiente del tiempo de la ecuación (33) en un campo magnético independiente del tiempo [6]

$$\lambda_x'(t) = B\cos\phi, \qquad \lambda_y'(t) = B\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad \lambda_z'(t) = B_0 - \frac{\omega}{\gamma}, \tag{34}$$

donde γ es la razón giromagnética asociada a la interacción [16, 27].

Es posible a partir de la intensidad, de la frecuencia y de la fase inicial del campo magnético oscilante, controlar los parámetros de un sistema de coordenadas esféricas (θ, φ) asociadas al espacio de parámetros $\boldsymbol{\lambda}'(t)$ del sistema rotante. Las coordenadas esféricas en esta situación particular pueden definirse como

$$\mathrm{sen}\,\theta = B, \qquad \cos\theta = B_0 - \gamma'\omega, \qquad \phi = \varphi, \tag{35}$$

donde $\gamma' = 1/\gamma$. El autoestado del hamiltoniano (32) expresado en las coordenadas esfericas (θ, φ) está dado por

$$\left| \tilde{\psi}(\phi) \right\rangle = \cos(\theta/2) \left| 0 \right\rangle + \sin(\theta/2) e^{\imath\phi} \left| 1 \right\rangle. \tag{36}$$

Si se expresa en función de la intensidad del campo magnético aplicado B , de la frecuencia de oscilación ω y de la fase inicial ϕ se obtiene

$$\left| \tilde{\psi}(\phi) \right\rangle = \frac{1 + B_0 - \gamma'\omega}{\sqrt{2(1 + B_0 - \gamma'\omega)}} \left| 0 \right\rangle + \frac{B e^{\imath\phi}}{\sqrt{2(1 + B_0 - \gamma'\omega)}} \left| 1 \right\rangle . \tag{37}$$

El ángulo θ, con el cual el qubit rota alrededor del eje z está dado por

$$\cos\theta = \frac{\lambda'_z(t)}{\sqrt{\lambda'^2_x + \lambda'^2_y + \lambda'^2_z +}} = \frac{B_0 - \gamma'\omega}{\sqrt{(B_0 - \gamma'\omega)^2 + B^2}} = B_0 - \gamma'\omega. \tag{38}$$

Para implementar la compuerta de fase abeliana es necesario desarrollar la integral en la ecuación (31). El potencial *gauge* expresado por el integrando de la ecuación (31) y explícitamente calculado en la ecuación (14) después de la parametrización realizada al qubit en la ecuación (37) toma la forma

$$\imath A(\lambda(t)) d\lambda = \frac{B^2}{2(1 + B_0 - \gamma'\omega)} \; d\phi. \tag{39}$$

Controlando el autoestado (37) de manera que describa una trayectoria cerrada en el espacio paramétrico, por ejemplo, manteniendo a la coordenada θ fija en tanto que la coordenada ϕ varíe entre 0 y 2π, se obtiene para la fase geométrica asociada a esa evolución que

$$\beta = -\pi(1 - \cos\theta). \tag{40}$$

La matriz que representa la compuerta de fase en la base computacional $\{\left| 0 \right\rangle, \left| 1 \right\rangle\}$ de la computación cuántica, se obtiene transformando los estados de la base mencionada de la siguiente manera

$$\left| 0 \right\rangle \mapsto \left| 0 \right\rangle \qquad \left| 1 \right\rangle \mapsto e^{\imath\beta} \left| 1 \right\rangle , \tag{41}$$

la representación matricial está dada por

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\imath\beta} \end{pmatrix}, \tag{42}$$

su diagrama correspondiente es expresado mediante

$$\left| x \right\rangle \; \overset{\mathbf{\Phi}}{-\!\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\!-} \; e^{\imath x\beta} \left| x \right\rangle , \tag{43}$$

donde $x \in \{0, 1\}$ [6].

Éste último resultado implica que la fase geométrica es igual a la mitad del ángulo sólido encerrado por la trayectoria que describe el qubit, al realizar un ciclo completo en el espacio base S^2.

La fase geométrica puede ser usada para implementar una compuerta de fase de un 2-qubit. El hamiltoniano que describe la situación es el de un sistema en el cual se considera la evolución de dos espines en interacción con un campo magnético y además se considera la interacción entre los espines. La compuerta de fase controlada que evoluciona condicionada al estado del primer qubit, se representa por

$$B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\imath\xi'} \end{pmatrix}, \tag{44}$$

donde $\xi^{'}$ es la fase adquirida por el segundo qubit condicional al primero. Tanto la compuerta de fase, como la compuerta de fase controlada han sido implementadas en experimentos de resonancia nuclear magnética (NMR), [18, 6]. Con fin de implementar un modelo de computación cuántico completamente geométrico y universal, es posible también contruir una compuerta de Hadamard a partir de una fase geométrica no abeliana.

5. Conclusiones

La computación cuántica geométrica abeliana admite una formulación en términos de un haz fibrado principal $\{U(1), \mathbb{H}_N, \Pi, \mathbb{C}P^{N-1}\}$, donde $\mathbb{H}_N$ es el espacio total, $\mathbb{C}P^{N-1}$ es el espacio base, $U(1)$ es la fibra y Π es la proyección. La conexión —campo *gauge*— implicada en este formalismo, es aquella que se obtiene a partir del *pull-back* sobre el espacio de parámetros S^2 de los cuales depende el hamiltonano. El *pull-back* sobre S^2 está denotado por $\{U(1), E, \Pi_E, M\}$. La compuerta de fase abeliana se encuentra de la evolución cíclica realizada por un autoestado del hamiltoniano asociado a la interacción de una partícula de espín 1/2 con un campo magnético oscilante. Con el modelo de la computación cuántica geométrica abeliana, es posible obtener dos compuertas lógico-cuánticas, la compuerta de 1-qubit, llamada la compuerta de fase y una compuerta de 2-qubits, llamada la compuerta de fase controlada, estas dos compuertas no forman un modelo de computación cuántica universal, pero si se tiene de alguna otra fuente la compuerta de Hadamard, por ejemplo de una evolución geométrica no abeliana, el modelo resulta ser universal.

6. Agradecimientos

Este artículo fue financiado por la universidad EAFIT, bajo el proyecto de investigación número 817431. Agradecemos al profesor Carlos Cadavid las múltiples conversaciones sostenidas y las aclaraciones realizadas alrededor de algunos de los tópicos desarrollados en el presente artículo.

Referencias

[1] Charles H. Bennett. Logical reversibility of computation. *IBM J. Res. and Dev.* páginas 525–532 (november 1973).

[2] N. J. Cerf, C. Adami y P. G. Kwiat. Optical simulation of quantum logic. *Phys. Rev. A* **57**(3), R1477 (1998).

[3] J. I. Cirac y P. Zoller. Quantum computations with cold trapped ions. *Phys. Rev. Lett.* **74**(20), 4091–4094 (may 1994).

[4] David Deutsch. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R. Soc. Lond. A* **400**, 97–117 (1985).

[5] David Deutsch. Quantum computational networks. *Proc. R. Soc. Lond. A* **425**, 73–90 (1989).

[6] Artur Ekert et al. Geometric quantum computation. *J. Mod. Optic.* **47**(14/15), 2501–2513 (2000).

[7] Richard P. Feynman. “Feynman lectures on computation”. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company (1996).

[8] Edward Fredkin y Tommaso Toffoli. Conservative logic. *Int. J. Theor. Phys.* **21**(3/4), 219–253 (1982).

[9] Kazuyuki Fujii. More on optical holonomic quantum computer. Preprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0005129 (2000).

[10] Kazuyuki Fujii. Note on coherent states and adiabatic conections, curvatures. *J. Math. Phys.* **41**, 4406–4412 (2000).

[11] Kazuyuki Fujii. From geometry to quantum computation. Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0107128 (2001).

[12] Kazuyuki Fujii. Introduction to Grassmann manifolds and quantum computation. Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0103011 (2001).

[13] Kazuyuki Fujii. Mathematical foundations of holonomic quantum computer. *Reports on Mathematical Physics* **48**(1/2), 75–82 (2001).

[14] Kazuyuki Fujii. Mathematical foundations of holonomic quantum computer II. Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/0101102 (2001).

[15] A. Galindo y P. Pascual. “Mecánica cuántica”. Madrid: Editorial Alhambra, S.A. (1978).

[16] N. Gershenfeld y Isaac. L. Chuang. Bulk spin resonance quantum computation. *Science* **275**, 350 (january 1997).

[17] Raúl Gómez Marín y Andrés Sicard Ramírez. “Informática teórica: Elementos propedeúticos”. Medellín: Fondo Editorial U. EAFIT (2001).

[18] Jonathan Jones et al. Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance. *Nature* **403**(6772), 869–871 (24 february 2000).

[19] Mikio Nahakara. “Geometry, Topology and Physics”. Philadelphia: Institute of Physics Publishing (1990).

[20] Alfred Shapere y Frank Wilczek. “Geometric phases in physics”, tomo 5 de “Advanced series in mathematical physics”. Singapur: World Scientific (1989).

[21] Peter W. Shor. Algorithms for quantum computation: Discrete log and factoring. En “Proc. 35th Symposium on Foundations of Computer Science”, páginas 124–134, Los Alamitos, CA (1994). IEEE Computer Society Press. Preprint: citeseer.ist.psu.edu/14533.html.

[22] Peter W. Shor. Polinomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J. Comput.* **26**(5), 1484–1509 (1997).

[23] Barry Simon. Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry’s phase. *Phys. Rev. Lett.* **51**(24), 2167–2170 (december 1983).

[24] Mathias Steffen y Isaac L. Chuang. Toward quantum computation: A five-qubit quantum processor. *IEEE Micro* páginas 24–34 (march-april 2001).

[25] Alan M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc.* **42**, 230–265 (1936-7). A correction, ibid, vol. 43, no. 2198, p. 544–546, 1937.

[26] I. V. Volovich. Atomic quantum computer. Eprint: arXiv.org/abs/quant-ph/9911062 (1999).

[27] Mario Vélez y Andrés Sicard. Compuerta de fase: Realización física a partir de una fase abeliana (fase de Berry). (Preprint) (2002).

[28] Paolo Zanardi y Mario Rasetti. Holonomic quantum computation. *Phys. Lett. A* **264**(2–3), 94–99 (1999).