CM0260 Lógica
Lógica proposicional: Método de deducción

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2015-2

Método de deducción

Argumento	Prueba formal de validez	
P_1	1	P_1
$\vdots$		$\vdots$
P_n	n	$P_n \quad / \therefore\ C$
$\therefore\ C$	n+1	S_1
		$\vdots$
	n+m	S_m

donde:

- cada proposición S_i se sigue de las proposiciones anteriores por un argumento válido elemental y
- la última proposición S_m es la conclusión C.

Método de deducción

Notación: El texto [Hurley y Watson 2016] usa el símbolo «/» y LogicCoach 11 usa el símbolo «//» en lugar del símbolo «/ $\therefore$».

Reglas de inferencia

1. Modus ponens (MP)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Reglas de inferencia

1. Modus ponens (MP)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ q \end{array}$$

2. Modus tollens (MT)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ \underline{\sim q \qquad\quad} \\ \sim p \end{array}$$

Reglas de inferencia

1. Modus ponens (MP)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

2. Modus tollens (MT)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

3. Hypothetical syllogism (HS)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ q \supset r \\ \hline p \supset r \end{array}$$

Reglas de inferencia

1. Modus ponens (MP)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

2. Modus tollens (MT)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

3. Hypothetical syllogism (HS)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ q \supset r \\ \hline p \supset r \end{array}$$

4. Disjunctive syllogism (DS)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$$

Reglas de inferencia

1. Modus ponens (MP)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

2. Modus tollens (MT)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

3. Hypothetical syllogism (HS)

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ q \supset r \\ \hline p \supset r \end{array}$$

4. Disjunctive syllogism (DS)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$$

5. Constructive dilemma (CD)

$$\begin{array}{l} (p \supset q) \wedge (r \supset s) \\ p \vee r \\ \hline q \vee s \end{array}$$

Reglas de inferencia

1. Modus ponens (MP)
$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array}$$
2. Modus tollens (MT)
$$\begin{array}{l} p \supset q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$
3. Hypothetical syllogism (HS)
$$\begin{array}{l} p \supset q \\ q \supset r \\ \hline p \supset r \end{array}$$
4. Disjunctive syllogism (DS)
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$$
5. Constructive dilemma (CD)
$$\begin{array}{l} (p \supset q) \wedge (r \supset s) \\ p \vee r \\ \hline q \vee s \end{array}$$
6. Simplification (Simp)
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline p \end{array}$$

(continua en la próxima diapositiva)

Reglas de inferencia

7. Conjunction (Conj)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

Reglas de inferencia

7. Conjunction (Conj)

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

8. Addition (Add)

$$\frac{p}{p \vee q}$$

Reglas de inferencia

7. Conjunction (Conj)

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

8. Addition (Add)

$$\frac{p}{p \vee q}$$

Observación: Uso de instancias de las reglas de inferencia.

Reglas de inferencia

Sugerencias

- Antes de comenzar a realizar ejercicios de construcción de pruebas formales, realizar (algunos de) los ejercicios I y II de la pág. 52 de Copi [2001].

Reglas de inferencia

Sugerencias

- Antes de comenzar a realizar ejercicios de construcción de pruebas formales, realizar (algunos de) los ejercicios I y II de la pág. 52 de Copi [2001].
- Hurley y Watson [2016] en las págs. 409, 410, 420 y 421 ilustra algunos de los errores comunes en el uso de las reglas de inferencia.

Reglas de inferencia

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.2, pág. 54)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$E \supset (F \wedge \sim G)$
2	$(F \vee G) \supset H$
3	$E \quad / \therefore \; H$

Reglas de inferencia

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.2, pág. 54)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$E \supset (F \wedge \sim G)$	
2	$(F \vee G) \supset H$	
3	$E \quad / \therefore\ H$	
4	$F \wedge \sim G$	MP 1, 3
5	F	Simp 4
6	$F \vee G$	Add 5
7	H	MP 2, 6

Reglas de inferencia

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.3, pág. 54)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1 $J \supset K$

2 $J \vee (K \vee {\sim}L)$

3 ${\sim}K \quad / \therefore \; {\sim}L \wedge {\sim}K$

Reglas de inferencia

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.3, pág. 54)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$J \supset K$	
2	$J \vee (K \vee \sim L)$	
3	$\sim K \quad / \therefore \ \sim L \wedge \sim K$	
4	$\sim J$	MT 1, 4
5	$K \vee \sim L$	DS 2, 4
6	$\sim L$	DS 5, 3
7	$\sim L \wedge \sim K$	Conj 6, 3

Reglas de inferencia

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.6, pág. 54)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1 $A \supset (B \wedge C)$

2 $\sim A \supset [(D \supset E) \wedge (F \supset G)]$

3 $(B \wedge C) \vee [(\sim A \supset D) \wedge (\sim A \supset F)]$

4 $\sim(B \wedge C) \wedge \sim(G \wedge D)$

$/ \therefore\ E \vee G$

Reglas de inferencia

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.6, pág. 54)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$A \supset (B \wedge C)$	
2	$\sim A \supset [(D \supset E) \wedge (F \supset G)]$	
3	$(B \wedge C) \vee [(\sim A \supset D) \wedge (\sim A \supset F)]$	
4	$\sim(B \wedge C) \wedge \sim(G \wedge D)$	
	$/ \therefore\ E \vee G$	
5	$\sim(B \wedge C)$	Simp 4
6	$\sim A$	MT 1, 5
7	$(D \supset E) \wedge (F \supset G)$	MP 2, 6
8	$D \supset E$	Simp 7
9	$(\sim A \supset D) \wedge (\sim A \supset F)$	DS 3, 5
10	$\sim A \supset D$	Simp 9
11	D	MP 10, 6
12	E	MP 8, 11
13	$E \vee G$	Add 12

Reglas de inferencia

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.7, pág. 54)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$(\sim H \vee I) \supset (J \supset K)$
2	$(\sim L \wedge \sim M) \supset (K \supset N)$
3	$(H \supset L) \wedge (L \supset H)$
4	$(\sim L \wedge \sim M) \wedge \sim O$
	$/ \therefore\ J \supset N$

Reglas de inferencia

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.7, pág. 54)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$(\sim H \vee I) \supset (J \supset K)$	
2	$(\sim L \wedge \sim M) \supset (K \supset N)$	
3	$(H \supset L) \wedge (L \supset H)$	
4	$(\sim L \wedge \sim M) \wedge \sim O$	
	$/ \therefore\ J \supset N$	
5	$\sim L \wedge \sim M$	Simp 4
6	$K \supset N$	MP 2, 5
7	$\sim L$	Simp 5
8	$H \supset L$	Simp 3
9	$\sim H$	MT 8, 7
10	$\sim H \vee I$	Add 9
11	$J \supset K$	MP 1, 10
12	$J \supset N$	HS 11, 6

Reglas de inferencia

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.10, pág. 54)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$(B \vee C) \supset (D \vee E)$
2	$((D \vee E) \vee F) \supset (G \vee H)$
3	$(G \vee H) \supset \sim D$
4	$E \supset \sim G$
5	B
	$/ \therefore \; H$

Reglas de inferencia

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.10, pág. 54)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$(B \vee C) \supset (D \vee E)$	
2	$((D \vee E) \vee F) \supset (G \vee H)$	
3	$(G \vee H) \supset \sim D$	
4	$E \supset \sim G$	
5	B	
	$/ \therefore\ H$	
6	$B \vee C$	Add 5
7	$D \vee E$	MP 1, 6
8	$(D \vee E) \vee F$	Add 7
9	$G \vee H$	MP 2, 8
10	$\sim D$	MP 3, 9
11	E	DS 7, 10
12	$\sim G$	MP 4, 11
13	H	DS 9, 12

Regla de reemplazo

Motivación

Construir una prueba formal de validez para el argumento

$$A \wedge B \quad / \therefore \; B$$

Regla de reemplazo

Motivación

Construir una prueba formal de validez para el argumento

$$A \wedge B \quad / \therefore\ B$$

No es posible con nuestras actuales reglas de inferencia.

Regla de reemplazo

Motivación

Construir una prueba formal de validez para el argumento

$$A \wedge B \quad / \therefore \ B$$

No es posible con nuestras actuales reglas de inferencia.

Notación: $p :: q$ significa que p es lógicamente equivalente a q.

Regla de reemplazo

Regla de reemplazo

Cualquiera de las siguientes expresiones lógicamente equivalentes pueden reemplazar a la otra en donde ocurran.

Regla de reemplazo

Regla de reemplazo

Cualquiera de las siguientes expresiones lógicamente equivalentes pueden reemplazar a la otra en donde ocurran.

9. De Morgan's rule (DM) $\sim(p \wedge q) :: (\sim p \vee \sim q)$
   $\sim(p \vee q) :: (\sim p \wedge \sim q)$

Regla de reemplazo

Regla de reemplazo

Cualquiera de las siguientes expresiones lógicamente equivalentes pueden reemplazar a la otra en donde ocurran.

9. De Morgan's rule (DM)

$$\sim(p \wedge q) :: (\sim p \vee \sim q)$$
$$\sim(p \vee q) :: (\sim p \wedge \sim q)$$

10. Commutativity (Com)

$$(p \vee q) :: (q \vee p)$$
$$(p \wedge q) :: (q \wedge p)$$

Regla de reemplazo

Regla de reemplazo

Cualquiera de las siguientes expresiones lógicamente equivalentes pueden reemplazar a la otra en donde ocurran.

9. De Morgan's rule (DM)
$$\sim(p \wedge q) :: (\sim p \vee \sim q)$$
$$\sim(p \vee q) :: (\sim p \wedge \sim q)$$

10. Commutativity (Com)
$$(p \vee q) :: (q \vee p)$$
$$(p \wedge q) :: (q \wedge p)$$

11. Associativity (Assoc)
$$[(p \vee (q \vee r)] :: [(p \vee q) \vee r]$$
$$[p \wedge (q \wedge r)] :: [(p \wedge q) \wedge r]$$

Regla de reemplazo

Regla de reemplazo

Cualquiera de las siguientes expresiones lógicamente equivalentes pueden reemplazar a la otra en donde ocurran.

9. De Morgan's rule (DM)
$$\sim(p \wedge q) :: (\sim p \vee \sim q)$$
$$\sim(p \vee q) :: (\sim p \wedge \sim q)$$

10. Commutativity (Com)
$$(p \vee q) :: (q \vee p)$$
$$(p \wedge q) :: (q \wedge p)$$

11. Associativity (Assoc)
$$[\,(p \vee (q \vee r)\,] :: [\,(p \vee q) \vee r\,]$$
$$[\,p \wedge (q \wedge r)\,] :: [\,(p \wedge q) \wedge r\,]$$

12. Distribution (Dist)
$$[\,p \wedge (q \vee r)\,] :: [\,(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\,]$$
$$[\,p \vee (q \wedge r)\,] :: [\,(p \vee q) \wedge (p \vee r)\,]$$

Regla de reemplazo

(continuación)

13. Double negation (DN) $p :: \sim\sim p$

Regla de reemplazo

(continuación)

13. Double negation (DN) $p :: \sim\sim p$

14. Transposition (Trans) $(p \supset q) :: (\sim q \supset \sim p)$

Regla de reemplazo

(continuación)

13. Double negation (DN) $p :: {\sim}{\sim}p$

14. Transposition (Trans) $(p \supset q) :: ({\sim}q \supset {\sim}p)$

15. Material implication (Impl) $(p \supset q) :: ({\sim}p \vee q)$

Regla de reemplazo

(continuación)

13. Double negation (DN) $\quad p :: \sim\sim p$

14. Transposition (Trans) $\quad (p \supset q) :: (\sim q \supset \sim p)$

15. Material implication (Impl) $\quad (p \supset q) :: (\sim p \vee q)$

16. Material equivalence (Equiv) $\quad (p \equiv q) :: [\,(p \supset q) \wedge (q \supset p)\,]$
    $(p \equiv q) :: [\,(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)\,]$

Regla de reemplazo

(continuación)

13.	Double negation (DN)	$p :: \sim\sim p$
14.	Transposition (Trans)	$(p \supset q) :: (\sim q \supset \sim p)$
15.	Material implication (Impl)	$(p \supset q) :: (\sim p \vee q)$
16.	Material equivalence (Equiv)	$(p \equiv q) :: [(p \supset q) \wedge (q \supset p)]$ $(p \equiv q) :: [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$
17.	Exportation (Exp)	$[(p \wedge q) \supset r] :: [p \supset (q \supset r)]$

Regla de reemplazo

(continuación)

13. Double negation (DN) $p :: {\sim}{\sim}p$
14. Transposition (Trans) $(p \supset q) :: ({\sim}q \supset {\sim}p)$
15. Material implication (Impl) $(p \supset q) :: ({\sim}p \vee q)$
16. Material equivalence (Equiv) $(p \equiv q) :: [(p \supset q) \wedge (q \supset p)]$
    $(p \equiv q) :: [(p \wedge q) \vee ({\sim}p \wedge {\sim}q)]$
17. Exportation (Exp) $[(p \wedge q) \supset r] :: [p \supset (q \supset r)]$
18. Tautology (Taut) $p :: (p \vee p)$
    $p :: (p \wedge p)$

Regla de reemplazo

Observación

«La regla de reemplazo autoriza que expresiones lógicamente equivalentes especificadas se reemplacen entre sí donde ocurran, aun en donde no constituyan renglones enteros de demostración. Pero las nueve primeras Reglas de Inferencia sólo pueden usarse tomando como premisas renglones enteros de una demostración.» [Copi 2001, pág. 59]

Regla de reemplazo

Ejemplo

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$A \wedge B \quad / \therefore \; B$	
2	$B \wedge A$	Com 1
3	B	Simp 2

Pruebas formales

Verificación vs construcción

Verificar una prueba formal es un proceso efectivo (algorítmico), pero construirla no lo es.

Pruebas formales

Verificación vs construcción

Verificar una prueba formal es un proceso efectivo (algorítmico), pero construirla no lo es.

Convención

En cada línea de una prueba solo se aplica una regla de inferencia o una equivalencia lógica, pero no ambas.

Pruebas formales

Verificación vs construcción

Verificar una prueba formal es un proceso efectivo (algorítmico), pero construirla no lo es.

Convención

En cada línea de una prueba solo se aplica una regla de inferencia o una equivalencia lógica, pero no ambas.

Sugerencia Antes de comenzar a realizar ejercicios de construcción de pruebas formales, realizar (algunos de) los ejercicios I y II de la pág. 61 y 62 de Copi [2001].

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.4, pág. 62)

La siguiente es una prueba formal de validez para el argumento indicado. Enuncie la «justificación» de cada renglón que no sea una premisa:

1	$(O \supset \sim P) \wedge (P \supset Q)$
2	$Q \supset O$
3	$\sim R \supset P$
	$/ \therefore \; R$

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.4, pág. 62)

La siguiente es una prueba formal de validez para el argumento indicado. Enuncie la «justificación» de cada renglón que no sea una premisa:

1	$(O \supset \sim P) \wedge (P \supset Q)$
2	$Q \supset O$
3	$\sim R \supset P$
	$/ \therefore\ R$
4	$\sim Q \vee O$
5	$O \vee \sim Q$
6	$(O \supset \sim P) \wedge (\sim Q \supset \sim P)$
7	$\sim P \vee \sim P$
8	$\sim P$
9	$\sim\sim R$
10	R

(continua en la próxima diapositiva)

Pruebas formales

Ejercicio (continuación)

1	$(O \supset \sim P) \wedge (P \supset Q)$	
2	$Q \supset O$	
3	$\sim R \supset P \quad / \therefore\ R$	
4	$\sim Q \vee O$	Impl 2
5	$O \vee \sim Q$	Com 4
6	$(O \supset \sim P) \wedge (\sim Q \supset \sim P)$	Trans 1
7	$\sim P \vee \sim P$	CD 6, 4
8	$\sim P$	Taut 7
9	$\sim\sim R$	MT 3, 8
10	R	DN 9

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.7, pág. 62)

La siguiente es una prueba formal de validez para el argumento indicado. Enuncie la «justificación» de cada renglón que no sea una premisa:

1	$C \supset (D \supset \sim C)$
2	$C \equiv D$
	$/ \therefore\ \sim C \wedge \sim D$

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.7, pág. 62)

La siguiente es una prueba formal de validez para el argumento indicado. Enuncie la «justificación» de cada renglón que no sea una premisa:

1	$C \supset (D \supset \sim C)$
2	$C \equiv D$
	$/ \therefore \ \sim C \wedge \sim D$
3	$C \supset (\sim\sim C \supset \sim D)$
4	$C \supset (C \supset \sim D)$
5	$(C \wedge C) \supset \sim D$
6	$C \supset \sim D$
7	$\sim C \vee \sim D$
8	$\sim(C \wedge D)$
9	$(C \wedge D) \vee (\sim C \wedge \sim D)$
10	$\sim C \wedge \sim D$

(continua en la próxima diapositiva)

Pruebas formales

Ejercicio (continuación)

1	$C \supset (D \supset \sim C)$
2	$C \equiv D \quad / \therefore \ \sim C \wedge \sim D$

Pruebas formales

Ejercicio (continuación)

1	$C \supset (D \supset \sim C)$	
2	$C \equiv D \quad / \therefore\ \sim C \wedge \sim D$	
3	$C \supset (\sim\sim C \supset \sim D)$	Trans 1
4	$C \supset (C \supset \sim D)$	DN 3
5	$(C \wedge C) \supset \sim D$	Exp 4
6	$C \supset \sim D$	Taut 5
7	$\sim C \vee \sim D$	Impl 6
8	$\sim(C \wedge D)$	DM 7
9	$(C \wedge D) \vee (\sim C \wedge \sim D)$	Equiv 2
10	$\sim C \wedge \sim D$	DS 9, 8

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.6, pág. 62)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

$$1 \quad N \supset O \quad / \therefore \ (N \wedge P) \supset 0$$

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.6, pág. 62)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$N \supset O \quad / \therefore \ (N \wedge P) \supset 0$	
2	$\sim N \vee O$	Impl 1
3	$(\sim N \vee O) \vee \sim P$	Add 2
4	$\sim P \vee (\sim N \vee O)$	Com 3
5	$(\sim P \vee \sim N) \vee O$	Assoc. 4
6	$\sim (P \wedge N) \vee O$	DM 5
7	$\sim (N \wedge P) \vee O$	Com 6
8	$(N \wedge P) \supset 0$	Impl 7

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.7, pág. 63)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1 $\quad (Q \vee R) \supset S \quad / \therefore \; Q \supset S$

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.7, pág. 63)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$(Q \vee R) \supset S \quad / \therefore \; Q \supset S$	
2	$\sim(Q \vee R) \vee S$	Impl 1
3	$(\sim Q \wedge \sim R) \vee S$	DM 2
4	$S \vee (\sim Q \wedge \sim R)$	Com 3
5	$(S \vee \sim Q) \wedge (S \vee \sim R)$	Dist 4
6	$S \vee \sim Q$	Simp 5
7	$\sim Q \vee S$	Com 6
8	$Q \supset S$	Impl 7

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.8, pág. 63)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1 $\quad T \supset \sim(U \supset V) \quad / \therefore\ T \supset U$

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.8, pág. 63)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$T \supset \sim(U \supset V) \quad / \therefore\ T \supset U$	
2	$\sim T \vee \sim(U \supset V)$	Impl 1
3	$\sim T \vee \sim(\sim U \vee V)$	Impl 2
4	$\sim T \vee (\sim\sim U \wedge \sim V)$	DM 3
5	$\sim T \vee (U \wedge \sim V)$	DN. 4
6	$(\sim T \vee U) \wedge (\sim T \vee \sim V)$	Dist 5
7	$\sim T \vee U$	Simp 6
8	$T \supset U$	Impl 7

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.11, pág. 63)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1 $\quad E \supset F$

2 $\quad E \supset G \quad / \therefore \; E \supset (F \land G)$

Pruebas formales

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.11, pág. 63)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$E \supset F$	
2	$E \supset G \quad / \therefore \ E \supset (F \land G)$	
3	$\sim E \lor F$	Impl 1
4	$\sim E \lor G$	Impl 2
5	$(\sim E \lor F) \land (\sim E \lor G)$	Conj 3, 4
6	$\sim E \lor (F \land G)$	Dist
7	$E \supset (F \land G)$	Impl 6

Nuevas reglas de demostración

- Regla de demostración condicional
- Regla de demostración indirecta

Nuevas reglas de demostración

- Regla de demostración condicional
- Regla de demostración indirecta

Observación

Copi [2001] presenta la regla de demostración condicional gradualmente. En § 3.5 presenta una primera versión de la regla y en § 3.8 presenta la versión general de la regla llamándola *regla de demostración condicional reforzada*. Nuestra presentación corresponde a la versión general de la regla y ésta será la versión evaluada.

Regla de demostración condicional

Idea

Adicionar supuestos con alcance limitado.

Regla de demostración condicional

Idea

Adicionar supuestos con alcance limitado.

Descarga de supuestos

Es necesario descargar cada supuesto adicionado.

Regla de demostración condicional

Idea

Adicionar supuestos con alcance limitado.

Descarga de supuestos

Es necesario descargar cada supuesto adicionado.

Regla de demostración condicional

$\quad A$	ACP (Assumption for Conditional Proof)
$\quad \vdots$	
$\quad C$	
$A \supset C$	CP (Conditional Proof)

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.11, pág. 63)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1 $\quad E \supset F$

2 $\quad E \supset G \quad / \therefore\ E \supset (F \wedge G)$

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.11, pág. 63)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$E \supset F$	
2	$E \supset G \quad / \therefore \; E \supset (F \wedge G)$	
3	$\quad E$	ACP

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio III.11, pág. 63)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$E \supset F$	
2	$E \supset G \quad / \therefore \; E \supset (F \wedge G)$	
3	$\quad E$	ACP
4	$\quad F$	MP 1, 3
5	$\quad G$	MP 2, 3
6	$\quad F \wedge G$	Conj 4, 5
7	$E \supset F \wedge G$	CP 3–6

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], pág. 75)

Construir una demostración condicional de validez para el ejercicio 22 de la pág. 65.

1 $\quad (T \supset E) \wedge (M \supset L) \quad / \therefore \ (T \wedge M) \supset (E \wedge L)$

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], pág. 75)

Construir una demostración condicional de validez para el ejercicio 22 de la pág. 65.

1	$(T \supset E) \wedge (M \supset L) \quad / \therefore \ (T \wedge M) \supset (E \wedge L)$	
2	$\vert\ T \wedge M$	ACP

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], pág. 75)

Construir una demostración condicional de validez para el ejercicio 22 de la pág. 65.

1	$(T \supset E) \wedge (M \supset L) \quad / \therefore \ (T \wedge M) \supset (E \wedge L)$	
2	$\quad T \wedge M$	ACP
3	$\quad T \supset E$	Simp 1
4	$\quad (M \supset L) \wedge (T \supset E)$	Com 1
5	$\quad M \supset L$	Simp 4
6	$\quad T$	Simp 2
7	$\quad M \wedge T$	Com 2
8	$\quad M$	Simp 7
9	$\quad E$	MP 3, 6
10	$\quad L$	MP 5, 8
11	$\quad E \wedge L$	Conj 9, 10
12	$(T \wedge M) \supset (E \wedge L)$	CP 2–11

Regla de demostración condicional

La regla de demostración condicional puede aplicarse más de una vez.

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 74)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1 $\quad A \supset (B \supset C)$

2 $\quad B \supset (C \supset D) \quad / \therefore\ A \supset (B \supset D)$

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 74)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$A \supset (B \supset C)$	
2	$B \supset (C \supset D) \quad / \therefore\ A \supset (B \supset D)$	
3	$\quad A$	ACP

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 74)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$A \supset (B \supset C)$	
2	$B \supset (C \supset D) \quad / \therefore\ A \supset (B \supset D)$	
3	$\mid\ A$	ACP
4	$\mid\ \mid\ B$	ACP

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], ejemplo pág. 74)

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	$A \supset (B \supset C)$	
2	$B \supset (C \supset D)$ $\quad / \therefore\ A \supset (B \supset D)$	
3	$\quad A$	ACP
4	$\qquad B$	ACP
5	$\qquad B \supset C$	MP 1, 3
6	$\qquad C$	MP 5, 4
7	$\qquad C \supset D$	MP 2, 4
8	$\qquad D$	MP 7, 6
9	$\quad B \supset D$	CP 4–8
10	$A \supset (B \supset D)$	CP 3–9

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio 2, pág. 84)

Utilizar el método de demostración condicional para demostrar la validez del siguiente argumento:

1 $(E \vee F) \supset G$

2 $H \supset (I \wedge J) \quad / \therefore \ (E \supset G) \wedge (H \supset I)$

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio 2, pág. 84)

Utilizar el método de demostración condicional para demostrar la validez del siguiente argumento:

1	$(E \vee F) \supset G$	
2	$H \supset (I \wedge J) \quad / \therefore \ (E \supset G) \wedge (H \supset I)$	
3	$\quad \mid E$	ACP
4	$\quad \mid E \vee F$	Add 3
5	$\quad \mid G$	MP 1, 4
6	$E \supset G$	CP 3–5
7	$\quad \mid H$	ACP
8	$\quad \mid I \wedge J$	MP 2, 7
9	$\quad \mid I$	Simp 8
10	$H \supset I$	CP 7–9
11	$(E \supset G) \wedge (H \supset I)$	Conj 6, 10

Regla de demostración condicional

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio 4, pág. 84)

Utilizar el método de demostración condicional para demostrar la validez del siguiente argumento:

1	$Q \vee (R \supset S)$
2	$(R \supset (R \wedge S)) \supset (T \vee U)$
3	$(T \supset Q) \wedge (U \supset V)$
	$/ \therefore\ Q \vee V$

(continua en la próxima diapositiva)

Regla de demostración condicional

Ejercicio (continuación)

1	$Q \vee (R \supset S)$
2	$(R \supset (R \wedge S)) \supset (T \vee U)$
3	$(T \supset Q) \wedge (U \supset V)$
	$/ \therefore\ Q \vee V$

4	$\sim Q$	ACP
5	$R \supset S$	DS 1, 4
6	R	ACP
7	S	MP 5, 6
8	$R \wedge S$	Conj 6, 7
9	$R \supset (R \wedge S)$	CP 6-8
10	$T \vee U$	MP 2, 9
11	$T \supset Q$	Simp 3
12	$\sim T$	MT 11, 4
13	U	DS 10, 12
14	$(U \supset V) \wedge (T \supset Q)$	Com 3
15	$U \supset V$	Simp 14
16	V	MP 15, 13
17	$\sim Q \supset V$	CP 4–16
18	$\sim\sim Q \vee V$	Impl 17
19	$Q \vee V$	DN 18

Regla de demostración condicional y argumentos

¿Por qué empleando la regla de demostración condicional, podemos demostramos el argumento

$$\{P\} \quad / \therefore \; A \supset C$$

donde $\{P\}$ representa un conjunto de premisas, por medio de la prueba

$$\begin{array}{lll}
\{P\} & & \\
\quad \vert\; A & & \text{ACP} \\
\quad \vert\; \vdots & & \\
\quad \vert\; C & & \\
A \supset C & & \text{CP}
\end{array}$$

?

Regla de demostración condicional y argumentos

Justificación

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{l} P \\ A \\ \therefore\ C \end{array} \arrow[r, "\text{condicional asociado}"] & (P \wedge A) \supset C \arrow[d, "\text{Exportación}"] \\
\begin{array}{l} P \\ \therefore\ A \supset C \end{array} \arrow[u, "\text{CP}"] & P \supset (A \supset C) \arrow[l, "\text{condicional asociado}"']
\end{tikzcd}
$$

Regla de demostración condicional

Más poder de demostración

La regla de demostración condicional aumenta el conjunto de argumentos que podemos demostrar con nuestras reglas de inferencia.

Regla de demostración indirecta

Preliminares

A partir de una contradicción podemos demostrar cualquier conclusión.

Regla de demostración indirecta

Preliminares

A partir de una contradicción podemos demostrar cualquier conclusión.

Ejemplo

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1 $\quad p$

2 $\quad \sim p \quad / \therefore \; q$

Regla de demostración indirecta

Preliminares

A partir de una contradicción podemos demostrar cualquier conclusión.

Ejemplo

Construir una prueba formal de validez para el argumento:

1	p	
2	$\sim p \quad / \therefore \; q$	
3	$p \vee q$	Add 1
4	q	DS 3, 2

Regla de demostración indirecta

$\quad C$	AIP (Assumption for Indirect Proof)
$\quad \vdots$	
$\quad q \wedge \sim q$	(contradicción)
$\sim C$	IP (Indirect Proof)

Regla de demostración indirecta

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio 2, pág. 78)

Construir una prueba formal de validez para el siguiente argumento empleando la regla de demostración indirecta:

1 $(D \lor E) \supset (F \supset G)$

2 $(\sim G \lor H) \supset (D \land F)$

$/ \therefore\ G$

(continua en la próxima diapositiva)

Regla de demostración indirecta

Ejercicio (continuación)

1 $\quad (D \vee E) \supset (F \supset G)$

2 $\quad (\sim G \vee H) \supset (D \wedge F)$

$\quad / \therefore \; G$

Regla de demostración indirecta

Ejercicio (continuación)

1	$(D \vee E) \supset (F \supset G)$	3	$\sim G$	AIP
2	$(\sim G \vee H) \supset (D \wedge F)$			
	$/ \therefore\ G$			

Regla de demostración indirecta

Ejercicio (continuación)

1	$(D \vee E) \supset (F \supset G)$	
2	$(\sim G \vee H) \supset (D \wedge F)$	
	$/ \therefore\ G$	
3	$\mid\ \sim G$	AIP
4	$\mid\ \sim G \vee H$	Add 3
5	$\mid\ D \wedge F$	MP 2, 4
6	$\mid\ F \wedge D$	Com 5
7	$\mid\ F$	Simp 6
8	$\mid\ D$	Simp 5
9	$\mid\ D \vee E$	Add 8
10	$\mid\ F \supset G$	MP 1, 9
11	$\mid\ \sim F$	MT 10, 3
12	$\mid\ F \wedge \sim F$	Conj 7, 11
13	$\sim\sim G$	IP 3–12
14	G	DN 14

Regla de demostración indirecta

Las reglas de demostración condicional y demostración indirecta se pueden usar simultáneamente.

Regla de demostración indirecta

Ejemplo (Hurley y Watson [2016], ejemplo pág. 461)

Demostrar el siguiente argumento.

$$
\begin{array}{ll}
1 & L \supset [\,{\sim}M \supset (N \wedge O)\,] \\
2 & {\sim}N \wedge P \\
 & /\therefore\; L \supset (M \wedge P)
\end{array}
$$

Regla de demostración indirecta

Ejemplo (Hurley y Watson [2016], ejemplo pág. 461)

Demostrar el siguiente argumento.

1	$L \supset [\sim M \supset (N \wedge O)]$	
2	$\sim N \wedge P$	
	$/ \therefore \; L \supset (M \wedge P)$	
3	$\quad\vert\; L$	ACP
4	$\quad\vert\; \sim M \supset (N \wedge O)$	MP 1,3
5	$\quad\vert\quad\vert\; \sim M$	AIP
6	$\quad\vert\quad\vert\; N \wedge O$	MP 4,5
7	$\quad\vert\quad\vert\; N$	Simp 6
8	$\quad\vert\quad\vert\; \sim N$	Simp 2
9	$\quad\vert\quad\vert\; N \wedge \sim N$	Conj 7,8
10	$\quad\vert\; \sim\sim M$	IP 5-9
11	$\quad\vert\; M$	DN 10
12	$\quad\vert\; P \wedge \sim N$	Com 2
13	$\quad\vert\; P$	Simp 12
14	$\quad\vert\; M \wedge P$	Conj 11, 13
15	$L \supset (M \wedge P)$	CP 3–14

Regla de demostración indirecta y argumentos

¿Por qué empleando la regla de demostración indirecta, podemos demostramos el argumento

$$\{P\} \quad / \therefore \; C$$

por medio de la prueba

$$
\begin{array}{ll}
\{P\} & \\
\quad \sim C & \text{AIP} \\
\quad \vdots & \\
\quad q \wedge \sim q & \text{(contradicción)} \\
\sim\sim C & \text{IP} \\
C & \text{DN}
\end{array}
$$

?

Regla de demostración indirecta y argumentos

Justificación

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{l} P, \sim C / \therefore\ C \\ \vdots \\ q \wedge \sim q \\ \vdots \\ C \end{array} \arrow[r, "\text{condicional asociado}"] & (P \wedge \sim C) \supset C \arrow[d, "\text{Exportación}"] \\
 & P \supset (\sim C \supset C) \arrow[d, "\text{Implicación material}"] \\
 & P \supset (\sim\sim C \vee C) \arrow[d, "\text{Doble negación}"] \\
 & P \supset (C \vee C) \arrow[d, "\text{Tautología}"] \\
\begin{array}{l} P \\ \therefore\ C \end{array} \arrow[uuuu, "\text{IP}"] & P \supset C \arrow[l, "\text{condicional asociado}"']
\end{tikzcd}
$$

Demostración de tautologías

Tautología condicional (antecedente $\supset$ consecuente)

Prueba empleando la regla de demostración condicional:

$$
\begin{array}{l|l l}
 & A & \text{ACP} \\
\cline{2-2}
 & \vdots & \\
 & C & \\
\multicolumn{2}{l}{A \supset C} & \text{CP}
\end{array}
$$

Tautología bicondicional ($A \equiv B$)

Prueba empleando la regla de demostración condicional:

$$
\begin{array}{rlll}
 & \vert & A & \text{ACP} \\
\cline{2-3}
 & \vert & \vdots & \\
 & \vert & B & \\
\text{m} & \multicolumn{2}{l}{A \supset B} & \text{CP} \\
 & \vert & B & \text{ACP} \\
\cline{2-3}
 & \vert & \vdots & \\
 & \vert & A & \\
\text{n} & \multicolumn{2}{l}{B \supset A} & \text{CP} \\
\text{n+1} & \multicolumn{2}{l}{(A \supset B) \wedge (B \supset A)} & \text{Conj m,n} \\
 & \multicolumn{2}{l}{A \equiv B} & \text{Equiv n+1}
\end{array}
$$

Demostración de tautologías

Tautología (T)

Prueba empleando la regla de demostración indirecta:

$$
\begin{array}{lll}
 & \quad \sim T & \text{AIP} \\
 & \quad \vdots & \\
 & \quad q \wedge \sim q & \text{(contradicción)} \\
\text{n} & \sim\sim T & \text{IP} \\
 & T & \text{DN n}
\end{array}
$$

Demostración de tautologías

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.4, pág. 80)

Verificar la siguiente tautología empleando la regla de demostración indirecta:
$(A \supset B) \vee (B \supset C)$.

(continua en la próxima diapositiva)

Demostración de tautologías

1	$\mid\ \sim[(A \supset B) \vee (B \supset C)]$	AIP
2	$\mid\ \sim(A \supset B) \wedge \sim(B \supset C)$	DM 1
3	$\mid\ \sim(\sim A \vee B) \wedge \sim(B \supset C)$	Impl 2
4	$\mid\ \sim(\sim A \vee B) \wedge \sim(\sim B \vee C)$	Impl 3
5	$\mid\ (\sim\sim A \wedge \sim B) \wedge \sim(\sim B \vee C)$	DM 4
6	$\mid\ (\sim\sim A \wedge \sim B) \wedge (\sim\sim B \wedge C)$	DM 5
7	$\mid\ (A \wedge \sim B) \wedge (\sim\sim B \wedge C)$	DN 6
8	$\mid\ (A \wedge \sim B) \wedge (B \wedge C)$	DN 7
$\vdots$	$\mid\ \vdots$	
15	$\mid\ B \wedge \sim B$	
16	$\sim\sim[(A \supset B) \vee (B \supset C)]$	IP 1-15
17	$(A \supset B) \vee (B \supset C)$	DN 16

Demostración de tautologías

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.5*, pág. 80)

Verificar la siguiente tautología empleando la regla de demostración indirecta:
$(A \supset B) \vee ({\sim}A \supset C)$.

(continua en la próxima diapositiva)

Demostración de tautologías

1	$\quad {\sim}[\,(A \supset B) \vee ({\sim}A \supset C)\,]$	AIP
2	$\quad {\sim}(A \supset B) \wedge {\sim}({\sim}A \supset C)$	DM 1
3	$\quad {\sim}({\sim}A \vee B) \wedge {\sim}({\sim}{\sim}A \vee C)$	Impl 2
4	$\quad ({\sim}{\sim}A \wedge {\sim}B) \wedge ({\sim}{\sim}{\sim}A \wedge {\sim}C)$	DM 3
5	$\quad {\sim}{\sim}A \wedge [\,{\sim}B \wedge ({\sim}{\sim}{\sim}A \wedge {\sim}C)\,]$	Assoc 4
6	$\quad {\sim}{\sim}A \wedge [\,({\sim}{\sim}{\sim}A \wedge {\sim}C) \wedge {\sim}B\,]$	Com 5
7	$\quad {\sim}{\sim}A \wedge [\,{\sim}{\sim}{\sim}A \wedge ({\sim}C \wedge {\sim}B)\,]$	Assoc 6
8	$\quad ({\sim}{\sim}A \wedge {\sim}{\sim}{\sim}A) \wedge ({\sim}C \wedge {\sim}B)$	Assoc 7
9	$\quad {\sim}{\sim}A \wedge {\sim}{\sim}{\sim}A$	Simp 8
10	${\sim}{\sim}[\,(A \supset B) \vee ({\sim}A \supset C)\,]$	IP 1-9
11	$(A \supset B) \vee ({\sim}A \supset C)$	DN 10

Demostración de tautologías

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.6, pág. 80)

Verificar la siguiente tautología empleando la regla de demostración indirecta: $A \vee (A \supset B)$.

Demostración de tautologías

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.6, pág. 80)

Verificar la siguiente tautología empleando la regla de demostración indirecta: $A \vee (A \supset B)$.

1	$\sim(A \vee (A \supset B))$	AIP
2	$\sim A \wedge \sim(A \supset B)$	DM 1
3	$\sim A$	Simp 2
4	$\sim(A \supset B) \wedge \sim A$	Conm 2
5	$\sim(A \supset B)$	Simp 4
6	$\sim(\sim A \vee B)$	Impl 5
7	$\sim\sim A \wedge \sim B$	DM 6
8	$\sim\sim A$	Simp 7
9	A	DN 8
10	$A \wedge \sim A$	Conj 3, 9
11	$\sim\sim[A \vee (A \supset B)]$	IP 1-10
12	$A \vee (A \supset B)$	DN 11

Demostración de tautologías

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.7, pág. 80)

Verificar la siguiente tautología empleando la regla de demostración condicional: $P \equiv \sim\sim P$.

Demostración de tautologías

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.7, pág. 80)

Verificar la siguiente tautología empleando la regla de demostración condicional: $P \equiv \sim\sim P$.

1	$\quad\vert\; P$	ACP
2	$\quad\vert\; \sim\sim P$	DN 1
3	$P \supset \sim\sim P$	CP 1-2
4	$\quad\vert\; \sim\sim P$	ACP
5	$\quad\vert\; P$	DN 4
6	$\sim\sim P \supset P$	CP 4-5
7	$(P \supset \sim\sim P) \land (\sim\sim P \supset P)$	Conj. 3, 6
8	$P \equiv \sim\sim P$	Equiv 7

Demostración de tautologías

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.7, pág. 80)

Verificar la siguiente tautología empleando la regla de demostración indirecta: $P \equiv {\sim}{\sim}P$.

Demostración de tautologías

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.7, pág. 80)

Verificar la siguiente tautología empleando la regla de demostración indirecta: $P \equiv {\sim}{\sim}P$.

1	$\sim(P \equiv {\sim}{\sim}P)$	AIP
2	$\sim[(P \supset {\sim}{\sim}P) \wedge ({\sim}{\sim}P \supset P)]$	Equiv 1
3	$\sim[(P \supset P) \wedge ({\sim}{\sim}P \supset P)]$	DN 2
4	$\sim[(P \supset P) \wedge (P \supset P)]$	DN 3
5	$\sim(P \supset P) \vee {\sim}(P \supset P)$	DM 4
6	$\sim(P \supset P)$	Taut 5
7	$\sim({\sim}P \vee P)$	Impl 6
8	${\sim}{\sim}P \wedge {\sim}P$	DM 7
9	$P \wedge {\sim}P$	DN 8
10	${\sim}{\sim}(P \equiv {\sim}{\sim}P)$	IP 1-9
11	$P \equiv {\sim}{\sim}P$	DN 10

Demostración de tautologías

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.10, pág. 80)

Verificar la siguiente tautología empleando la regla de demostración indirecta:
$\sim[\,(A \supset \sim A) \wedge (\sim A \supset A)\,]$.

Demostración de tautologías

Ejercicio (Copi [2001], ejercicio II.10, pág. 80)

Verificar la siguiente tautología empleando la regla de demostración indirecta:
$\sim[(A \supset \sim A) \wedge (\sim A \supset A)]$.

1	$(A \supset \sim A) \wedge (\sim A \supset A)$	AIP
2	$A \supset \sim A$	Simp 1
3	$(\sim A \supset A) \wedge (A \supset \sim A)$	Com 1
4	$\sim A \supset A$	Simp 3
5	$\sim A \vee \sim A$	Impl 2
6	$\sim A$	Taut 5
7	A	MP 4, 6
8	$A \wedge \sim A$	Conj 7, 6
9	$\sim[(A \supset \sim A) \wedge (\sim A \supset A)]$	IP 1-8

Reglas de demostración condicional e indirecta

Pregunta

¿Por qué la regla de demostración indirecta es un caso particular de la regla de demostración condicional?

Método de deducción y tautologías

Teorema (Completeness (completitud))

Toda tautología puede demostrarse por el método de deducción.

Teorema (Soundness (validez))

Si un argumento es válido empleando el método de deducción, entonces su condicional asociado es tautológico.

Referencias

- Copi, Irving M. [1954] (2001). Lógica Simbólica. 2.ª ed., 20.ª reimpresión. Título original «*Symbolic Logic*». Traducción por Andrés Sestier Boulier. Compañía Editorial Continental (vid. págs. 13-24, 39, 41-45, 47, 48, 51-60, 64-69, 71-77, 86, 98, 100, 102-109).
- Hurley, Patrick J. y Watson, Lori [1972] (2016). A Concise Introduction to Logic. 13.ª ed. Cengage Learning (vid. págs. 3, 13, 14, 91, 92).