CM0246 Estructuras Discretas
§ 10.3 Representaciones matriciales de grafos

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Matrices

Matrices y grafos dirigidos

Matrices y grafos no dirigidos

Matrices y componentes conexos

Conteo de caminos de longitud n

Referencias

Matrices

Definición

Una **matrix** $\boldsymbol{A}$ **de** $\boldsymbol{m \times n}$ **sobre un conjunto** $\boldsymbol{S}$, denotada $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, es un arreglo rectangular de elementos de S dispuestos en m filas (renglones) y n columnas:

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Diagonal principal de una matriz

Definición

Sea $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ una matriz cuadrada. La **diagonal principal** de $\boldsymbol{A}$ está formada por las entradas $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matrices simétricas

Definición

Sea $\boldsymbol{A}_{n\times n} = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. La matriz $\boldsymbol{A}$ es **simétrica**, si y solo si,

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Matrices simétricas

Ejemplo

La siguiente matrix 3×3 es simétrica.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Multiplicación de matrices

Definición

Sean $\boldsymbol{A}_{m\times k}$ y $\boldsymbol{B}_{k\times n}$ dos matrices sobre los números reales $\mathbf{R}$. El producto de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$, denotado $\boldsymbol{AB}$, es la matrix $m \times n$ definida por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$.

Multiplicación de matrices

Ejemplo

En el tablero.

Matriz identidad

Definición

Sea n un número entero positivo. La **matriz identidad** $\boldsymbol{n \times n}$, denotada $\boldsymbol{I_n} = (\delta_{ij})$, es la matriz cuyas entradas de la diagonal principal son 1 y las otras entradas son 0, es decir,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Matriz identidad

Ejemplo

Matrices identidad $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$ y $\boldsymbol{I}_3$.

$$\boldsymbol{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz identidad

Teorema (Ejemplo 10.3.9)

La matriz identidad es el elemento identidad para la multiplicación de matrices. Es decir, sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $m \times n$, entonces

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}.$$

Potencias de una matriz

Definición

Sea $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ una matriz cuadrada. Las **potencias** de $\boldsymbol{A}$ están definidas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^0 &= \boldsymbol{I_n}, \\ \boldsymbol{A}^n &= \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{A}, \text{ para } n \geq 1. \end{aligned}$$

Tema

Matrices y grafos dirigidos

Definición

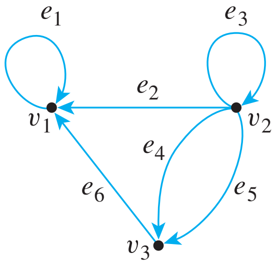
Sea G un grafo dirigido con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$. La **matriz de adyacencia de** $\boldsymbol{G}$ es la matriz cuadrada $\boldsymbol{A}_{n\times n} = (a_{ij})$ sobre los números naturales $\mathbf{N}$, donde

$$a_{ij} = \text{número de flechas (aristas dirigidas) de } v_i \text{ a } v_j.$$

Matrices y grafos dirigidos

Ejemplo

Un grafo dirigido y su matriz de adyacencia (Fig. 10.3.1).



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrices y grafos dirigidos

Preguntas

Sea G un grafo dirigido. La matriz de adyacencia de G:

(i) ¿Permite representar los bucles de G?

Matrices y grafos dirigidos

Preguntas

Sea G un grafo dirigido. La matriz de adyacencia de G:

(i) ¿Permite representar los bucles de G?

Sí.

Matrices y grafos dirigidos

Preguntas

Sea G un grafo dirigido. La matriz de adyacencia de G:

(i) ¿Permite representar los bucles de G?

Sí.

(ii) ¿Permite representar las flechas paralelas de G?

Matrices y grafos dirigidos

Preguntas

Sea G un grafo dirigido. La matriz de adyacencia de G:

(i) ¿Permite representar los bucles de G?

Sí.

(ii) ¿Permite representar las flechas paralelas de G?

Sí.

Matrices y grafos dirigidos

Preguntas

Sea G un grafo dirigido. La matriz de adyacencia de G:

(i) ¿Permite representar los bucles de G?

Sí.

(ii) ¿Permite representar las flechas paralelas de G?

Sí.

(iii) ¿Permite representar las etiquetas de las flechas G?

Matrices y grafos dirigidos

Preguntas

Sea G un grafo dirigido. La matriz de adyacencia de G:

(i) ¿Permite representar los bucles de G?

Sí.

(ii) ¿Permite representar las flechas paralelas de G?

Sí.

(iii) ¿Permite representar las etiquetas de las flechas G?

No.

Tema

Matrices y grafos no dirigidos

Definición

Sea G un grafo no dirigido con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$. La **matriz de adyacencia de G** es la matriz cuadrada $A_{n \times n} = (a_{ij})$ sobre los números naturales $\mathbf{N}$, donde

$$a_{ij} = \text{número de aristas de } v_i \text{ a } v_j.$$

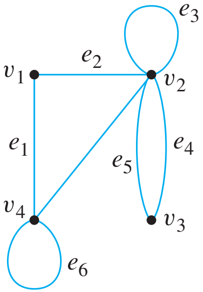
Observación

La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido es una matriz simétrica.

Matrices y grafos no dirigidos

Ejemplo

Un grafo no dirigido y su matriz de adyacencia (figura pág. 664).



$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrices y grafos no dirigidos

Pregunta

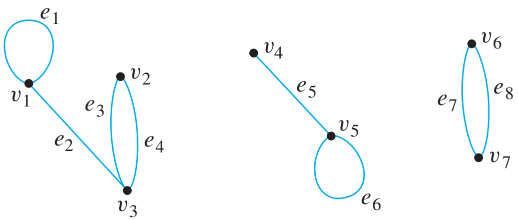
¿Es la matriz de adyacencia de un grafo simple una matriz booleana?

Tema

Matrices y componentes conexos

Ejemplo

Un grafo con tres componentes conexos y su matriz de adyacencia (figura pág. 665).



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tema

Longitud de un camino

Definición

Sea G un grafo. La **longitud** del camino

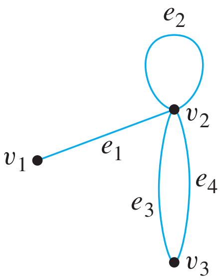
$$v_0 \ e_1 \ v_1 \ e_2 \dots v_{n-1} \ e_n \ v_n$$

es el número de aristas en el camino.

Número de caminos de longitud n

Ejemplo

Para el grafo de la figura (pág. 671) hay seis caminos de longitud dos de v_2 a v_2.



$v_2\ e_1\ v_1\ e_1\ v_2,$

$v_2\ e_2\ v_2\ e_2\ v_2,$

$v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_2,$

$v_2\ e_4\ v_3\ e_3\ v_2,$

$v_2\ e_3\ v_3\ e_3\ v_2,$

$v_2\ e_4\ v_3\ e_4\ v_2.$

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Número de caminos de longitud n

Teorema 10.3.2

Sea G un grafo con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y sea $\boldsymbol{A}$ la matriz de adyacencia de G. Entonces, para todo entero positivo n y para $i, j = 1, 2, \ldots, m$,

$$\text{la } ij\text{-ésima entrada de } \boldsymbol{A}^n = \text{número de caminos de longitud } n \text{ de } v_i \text{ a } v_j.$$

Tema

Referencias

Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).