CM0246 Estructuras Discretas
§ 8.1 Relaciones sobre conjuntos

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Relaciones binarias

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Recordemos que el **producto cartesiano de** A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \}.$$

Relaciones binarias

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Una **relación binaria $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$** es un subconjunto de $A \times B$.

Relaciones binarias

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Una **relación binaria $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$** es un subconjunto de $A \times B$.

El conjunto A es el **dominio** de R y el conjunto B es el **codominio** de R.

Relaciones binarias

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Una **relación binaria $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$** es un subconjunto de $A \times B$.

El conjunto A es el **dominio** de R y el conjunto B es el **codominio** de R.

Observación

La definición de relación binaria está en la Sección 1.3.

Relaciones binarias

Definición

Sea R una relación binaria de A en B y sea $(x, y) \in A \times B$ un par ordenado:

(i) **El elemento $\boldsymbol{x}$ está relacionado con el elemento $\boldsymbol{y}$ por la relación $\boldsymbol{R}$**, denotado $x\,R\,y$,

$$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in R.$$

(ii) **El elemento $\boldsymbol{x}$ no está relacionado con el elemento $\boldsymbol{y}$ por la relación $\boldsymbol{R}$**, denotado $x \not R\, y$,

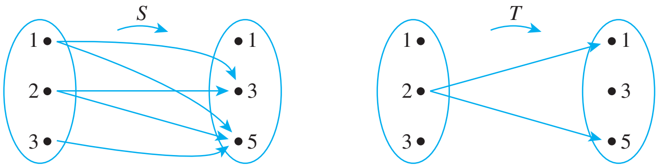
$$x \not R\, y \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \notin R.$$

Ejemplo 1.3.3

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y las relaciones S y T de A en B definidas por

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow x < y, \qquad T = \{(2, 1), (2, 5)\}.$$

Diagramas de flechas para las relaciones S y T (figura pág. 16).



Relaciones binarias

Ejemplo

En el tablero.

Relaciones binarias

Ejemplo

En el tablero.

Ejemplo

Sean A y B dos conjuntos. Note que $R = \emptyset$ y $S = A \times B$ son relaciones de A en B. Estas relaciones son llamadas **relaciones triviales**.

Relaciones binarias

Ejemplo 8.1.2 (la relación de congruencia módulo 2)

Sea E la relación de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}$ definida por: para todo $a, b \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned} a\,E\,b \quad &\Leftrightarrow \quad a - b \text{ es par} \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \mid (a - b). \end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.3 (una relación sobre un conjunto potencia*)

Sea $A = \{a, b, c\}$. Entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Definimos la relación $\boldsymbol{S} \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ por:

Para todo $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(A)$,

$$S_1 \, \boldsymbol{S} \, S_2 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \text{ tiene al menos tantos elementos como } S_2.$$

*Véase correcciones al texto guía en la página web del curso.

Tema

Relaciones inversas

Definición

Sean A y B dos conjuntos y sea R una relación de A en B. La **relación inversa** de B en A, denotada R^{-1}, está definida por:

$$R^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R \},$$

es decir, para todo $x \in A$ y $y \in B$,

$$y \, R^{-1} \, x \quad \Leftrightarrow \quad x \, R \, y.$$

Relaciones inversas

Definición

Sean A y B dos conjuntos y sea R una relación de A en B. La **relación inversa** de B en A, denotada R^{-1}, está definida por:

$$R^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R \},$$

es decir, para todo $x \in A$ y $y \in B$,

$$y \, R^{-1} \, x \quad \Leftrightarrow \quad x \, R \, y.$$

Ejemplo

En el tablero.

Tema

Relaciones sobre un conjunto

Definición

Sea A un conjunto. Una **relación sobre A** es una relación binaria de A en A.

Relaciones sobre un conjunto

Ejemplo

Algunas relaciones sobre $\mathbf{Z}$:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{\, (a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid a \leq b \,\}, \\
R_2 &= \{\, (a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid a > b \,\}, \\
R_3 &= \{\, (a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid a = b \vee a = -b \,\}, \\
R_4 &= \{\, (a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid a = b \,\}, \\
R_5 &= \{\, (a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid a = b + 1 \,\}, \\
R_6 &= \{\, (a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid a + b \leq 3 \,\}.
\end{aligned}
$$

Relaciones sobre un conjunto

Ejercicio

Sea R una relación sobre un conjunto A. ¿Es posible que $R = R^{-1}$?

Relaciones sobre un conjunto

Representación por grafos dirigidos

En lugar de representar una relación R sobre un conjunto A por un diagrama de flechas, la relación se representa por un grafo dirigido:

Para todos los puntos x y y en A,

$$\text{hay una flecha de } x \text{ a } y \quad \Leftrightarrow \quad x\, R\, y.$$

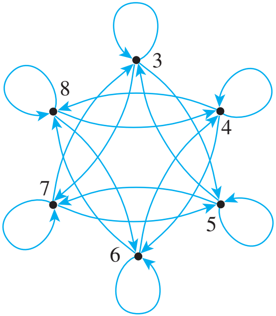
Relaciones sobre un conjunto

Ejemplo 8.1.6

Sea $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Definimos la relación R sobre A por: para toda $x, y \in A$,

$$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad 2 \mid (x - y).$$

Grafo dirigido para la relación R (figura pág. 446).



Tema

Producto cartesiano de n conjuntos

Definición

Recordemos que el **producto cartesiano de** n **conjuntos** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es el conjunto de n-tuplas

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \,\}.$$

Proyecciones

Definición

La i-esima proyección de $A_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times A_n$ está definida por

$$\begin{aligned} p_i &: A_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times A_n \to A_i \\ p_i &((a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)) = a_i. \end{aligned}$$

Proyecciones

Definición

La i-esima proyección de $A_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times A_n$ está definida por

$$p_i : A_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times A_n \to A_i$$
$$p_i\left((a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)\right) = a_i.$$

Ejemplo

En el tablero.

Relaciones n-arias

Definición

Una **relación n-aria** R sobre n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Relaciones n-arias

Definición

Una **relación n-aria** R sobre n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Las relaciones 2-arias, 3-arias y 4-arias se denominan relaciones **binarias**, **ternarias** y **cuaternarias**, respectivamente.

Relaciones n-arias

Definición

Una **relación n-aria** R sobre n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Las relaciones 2-arias, 3-arias y 4-arias se denominan relaciones **binarias**, **ternarias** y **cuaternarias**, respectivamente.

Ejemplo

En el tablero.

Relaciones n-arias

Ejemplo 8.1.7 (una base de datos simple)

Sean,

A_1 un conjunto de enteros positivos,
A_2 un conjunto de cadenas de caracteres alfabéticos,
A_3 un conjunto de cadenas de caracteres numéricos y
A_4 un conjunto de cadenas de caracteres alfabéticos.

Relaciones n-arias

Ejemplo 8.1.7 (una base de datos simple)

Sean,
A_1 un conjunto de enteros positivos,
A_2 un conjunto de cadenas de caracteres alfabéticos,
A_3 un conjunto de cadenas de caracteres numéricos y
A_4 un conjunto de cadenas de caracteres alfabéticos.

Definimos una relación R sobre $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ por

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \text{un paciente con número de identificación de paciente } a_1 \text{ y nombre } a_2\text{, que fue admitido en la fecha } a_3\text{, con diagnóstico primario } a_4.$$

(continua en la próxima diapositiva)

Relaciones n-arias

Ejemplo 8.1.7 (continuación)

Sea S la base de datos de un hospital compuesta por el siguiente conjunto de 4-tuplas:

(011985, John Schmidt, 020710, asma)

(574329, Tak Kurosawa, 011410, neumonía)

(466581, Mary Lazars, 010310, apendicitis)

(008352, Joan Kaplan, 112409, gastritis)

(011985, John Schmidt, 021710, neumonía)

(244388, Sarah Wu, 010310, pierna rota)

(778400, Jamal Baskers, 122709, apendicitis)

(continua en la próxima diapositiva)

Ejemplo 8.1.7 (continuación)

Consulta SQL a la base de datos:

```
SELECCIONE IDPaciente, Nombre DE S DONDE
FechaAdmisión = 010310
```

Relaciones *n*-arias

Ejemplo 8.1.7 (continuación)

Consulta SQL a la base de datos:

```
SELECCIONE IDPaciente, Nombre DE S DONDE
FechaAdmisión = 010310
```

Respuesta:

```
466581 Mary Lazars
244388 Sarah Wu
```

Relaciones n-arias

Ejemplo 8.1.7 (continuación)

Consulta SQL a la base de datos:

```
SELECCIONE IDPaciente, Nombre DE S DONDE
FechaAdmisión = 010310
```

Respuesta:

```
466581 Mary Lazars
244388 Sarah Wu
```

Es decir, la respuesta es la proyección de las dos primeras coordenadas del conjunto

$$(A_1 \times A_2 \times \{010310\} \times A_4) \cap S.$$

Tema

Referencias

Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).