

CM0246 Estructuras Discretas
§ 8.5 Relaciones de orden parcial

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Introducción

Conjuntos parcialmente ordenados

Diagramas de Hasse

Ordenes lexicográficos

Conjuntos totalmente ordenados

Elementos notables

Ordenamiento topológico

Referencias

Tema

Introducción

Conjuntos parcialmente ordenados

Diagramas de Hasse

Ordenes lexicográficos

Conjuntos totalmente ordenados

Elementos notables

Ordenamiento topológico

Referencias

Introducción

Se pueden emplear **relaciones sobre un conjunto** para ordenar **algunos** o **todos** los elementos del conjunto.

Introducción

Se pueden emplear **relaciones sobre un conjunto** para ordenar **algunos** o **todos** los elementos del conjunto.

Ejemplo (algunas relaciones de orden)

- ▶ Palabras en un diccionario

$(a, b) \in R$ si a es una palabra que está antes que la palabra b en el diccionario.

Se pueden emplear **relaciones sobre un conjunto** para ordenar **algunos** o **todos** los elementos del conjunto.

Ejemplo (algunas relaciones de orden)

- ▶ Palabras en un diccionario

$(a, b) \in R$ si a es una palabra que está antes que la palabra b en el diccionario.

- ▶ Genealogía académica

$(a, b) \in R$ si la persona a fue el director de la tesis de la persona b .

Se pueden emplear **relaciones sobre un conjunto** para ordenar **algunos** o **todos** los elementos del conjunto.

Ejemplo (algunas relaciones de orden)

- ▶ Palabras en un diccionario

$(a, b) \in R$ si a es una palabra que está antes que la palabra b en el diccionario.

- ▶ Genealogía académica

$(a, b) \in R$ si la persona a fue el director de la tesis de la persona b .

- ▶ Programación de trabajos/proyectos

$(a, b) \in R$ si a es una tarea que debe ser completada antes que la tarea b comience.

Tema

Introducción

Conjuntos parcialmente ordenados

Diagramas de Hasse

Ordenes lexicográficos

Conjuntos totalmente ordenados

Elementos notables

Ordenamiento topológico

Referencias

Relaciones antisimétricas

Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A .

R es **antisimétrica** \Leftrightarrow para toda $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ entonces $x = y$.

Relaciones antisimétricas

Ejemplo

La relación \leq en los números reales \mathbf{R} es una relación antisimétrica.

Relaciones antisimétricas

Ejemplo 8.5.2

Se definen las siguientes relaciones:

$$\text{para toda } a, b \in \mathbf{Z}^+, a R_1 b \Leftrightarrow a \mid b,$$

$$\text{para toda } a, b \in \mathbf{Z}, a R_2 b \Leftrightarrow a \mid b.$$

Para las relaciones R_1 y R_2 tenemos:

- (i) La relación R_1 es antisimétrica.
En el tablero.
- (ii) La relación R_2 no es antisimétrica.
En el tablero.

Relaciones antisimétricas

Ejemplo (la relación de subconjunto)

Sea \mathcal{C} un colección de conjuntos.

Observar que el concepto de subconjunto es un relación sobre \mathcal{C} .

La relación \subseteq es una relación antisimétrica porque para todos $A, B \in \mathcal{C}$, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.

Relaciones de orden parcial

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A . La relación R es una **relación de orden parcial sobre A** , si y solo si, es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Relaciones de orden parcial

Ejemplo

La relación \leq en los números reales \mathbf{R} es una relación de orden parcial.

Relaciones de orden parcial

Ejemplo

8.5.3[la relación de subconjunto] Sea \mathcal{C} un colección de conjuntos. La relación \subseteq sobre \mathcal{C} es un relación de orden parcial.

Relaciones de orden parcial

Ejemplo 8.5.4

La relación de divisibilidad ($|$) sobre los números enteros positivos \mathbb{Z}^+ es una relación de orden parcial.

Conjuntos parcialmente ordenados

Notation

El símbolo \preceq denota una relación de orden parcial arbitraria.

Conjuntos parcialmente ordenados

Notation

El símbolo \preceq denota una relación de orden parcial arbitraria.

Definición

Un conjunto A es un **conjunto parcialmente ordenado (o *poset*)** respecto a una relación \preceq , si y solo si, la relación \preceq es una relación de orden parcial sobre A .

Conjuntos parcialmente ordenados

Ejemplo

Los siguientes conjuntos son parcialmente ordenados respecto a la relación indicada:

- (i) El conjunto de los números reales \mathbf{R} respecto a la relación menor o igual a (\leq).
- (ii) El conjunto de partes de un conjunto respecto a la relación de subconjunto (\subseteq).
- (iii) El conjunto de los números enteros positivos \mathbf{Z}^+ respecto a la relación de divisibilidad (\mid).

Conjuntos parcialmente ordenados

Notation

En lugar de escribir «sea A un conjunto parcialmente ordenado respecto a la relación \preceq » escribiremos «sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado».*

*Esta notación no es usada por el texto guía.

Conjuntos parcialmente ordenados

Notation

En lugar de escribir «sea A un conjunto parcialmente ordenado respecto a la relación \preceq » escribiremos «sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado».*

Ejemplo

Los siguientes conjuntos son conjuntos parcialmente ordenados:

- (i) (\mathbf{R}, \leq) .
- (ii) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde A es un conjunto.
- (iii) $(\mathbf{Z}^+, |)$.

*Esta notación no es usada por el texto guía.

Tema

Introducción

Conjuntos parcialmente ordenados

Diagramas de Hasse

Ordenes lexicográficos

Conjuntos totalmente ordenados

Elementos notables

Ordenamiento topológico

Referencias

Diagramas de Hasse

Descripción

En lugar de representar una relación de orden parcial por un grafo dirigido ésta se puede representar por un **diagrama de Hasse**.

Diagramas de Hasse

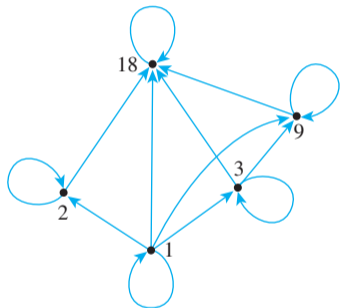
Construcción de un diagrama de Hasse a partir de un grafo dirigido

- (i) Construir el grafo dirigido de la relación de tal forma que todas las flechas apunten hacia arriba.
- (ii) Remover los bucles.
- (iii) Remover las flechas que deberían estar porque la relación es transitiva.
- (iv) Convertir el grafo dirigido en un grafo no dirigido.

Diagramas de Hasse

Ejemplo

Grafo dirigido y diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(\{1, 2, 3, 9, 18\}, |)$.



Grafo dirigido (figura pág 503).

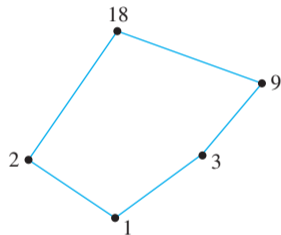
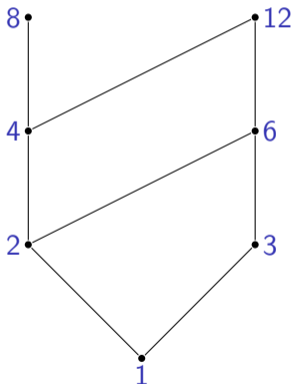


Diagrama de Hasse (figura pág 504).

Diagramas de Hasse

Ejemplo

Diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$.



Diagramas de Hasse

Ejemplo 8.5.7

Sea $A = \{a, b, c\}$. La relación \subseteq sobre $\mathcal{P}(A)$ es una relación de orden parcial.

Diagramas de Hasse

Ejemplo 8.5.7

Sea $A = \{a, b, c\}$. La relación \subseteq sobre $\mathcal{P}(A)$ es una relación de orden parcial.

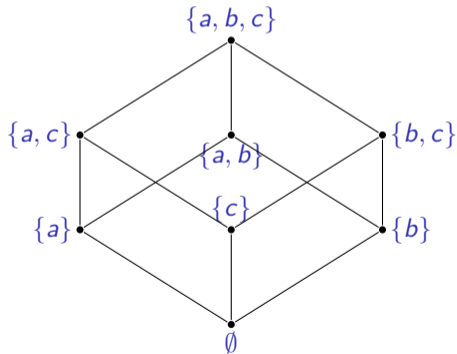
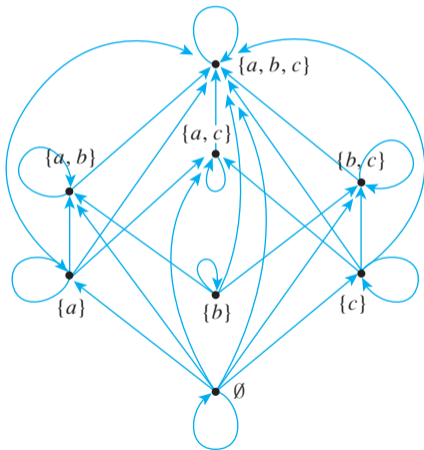


Figura pág. 504.

Tema

Introducción

Conjuntos parcialmente ordenados

Diagramas de Hasse

Ordenes lexicográficos

Conjuntos totalmente ordenados

Elementos notables

Ordenamiento topológico

Referencias

Ordenes lexicográficos

Ejemplo

Sea \preceq la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:*

Para todas las parejas ordenadas $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 < a_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \leq b_2).$$

*Esta definición no está en el texto guía.

Ordenes lexicográficos

Ejemplo

Sea \preceq la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:*

Para todas las parejas ordenadas $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 < a_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \leq b_2).$$

(i) Es $(3, 100) \preceq (4, 4)$?

*Esta definición no está en el texto guía.

Ordenes lexicográficos

Ejemplo

Sea \preceq la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:*

Para todas las parejas ordenadas $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 < a_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \leq b_2).$$

(i) Es $(3, 100) \preceq (4, 4)$?

(ii) Es $(3, 5) \preceq (3, 4)$?

*Esta definición no está en el texto guía.

Ordenes lexicográficos

Definición

Sean (A, \preceq_A) y (B, \preceq_B) dos conjuntos parcialmente ordenados. La relación de **orden lexicográfico sobre $A \times B$** , denotada \preceq , está definida por:*

Para todas las parejas ordenadas $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$,

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff a_1 \prec_A a_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \preceq_B b_2).$$

*Esta definición no está en el texto guía.

Ordenes lexicográficos

Teorema

Sean (A, \preceq_A) y (B, \preceq_B) dos conjuntos parcialmente ordenados. La relación de orden lexicográfico \preceq sobre $A \times B$ es un relación de orden parcial, es decir, el conjunto $(A \times B, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

*Este teorema no está en el texto guía.

Ordenes lexicográficos

Definición

Sean $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$ conjuntos parcialmente ordenados. La relación de **orden lexicográfico sobre $A_1 \times \dots \times A_n$** , denotada \preceq , está definida por:*

Para todas las n -tuplas ordenadas $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$:

$$(a_1, \dots, a_n) \preceq (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow (\exists m > 0)(\forall i < m)(a_i = b_i \text{ y } a_m \preceq_m b_m).$$

Es decir, $(a_1, \dots, a_n) \preceq (b_1, \dots, b_n)$, si y solo si, $a_m \preceq_m b_m$ y todos los términos precedentes son iguales.

*Esta definición no está en el texto guía.

Ordenes lexicográficos

Teorema

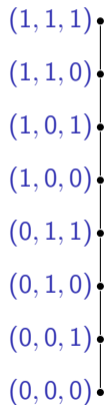
Sean $(A_1, \preceq_1), \dots, (A_n, \preceq_n)$ conjuntos parcialmente ordenados. La relación de orden lexicográfico \preceq sobre $A_1 \times \dots \times A_n$ es una relación de orden parcial, es decir, el conjunto $(A_1 \times \dots \times A_n, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

*Este teorema no está en el texto guía.

Ordenes lexicográficos

Ejemplo

Sea (A, \leq) , donde $A = \{0, 1\}$. El orden lexicográfico $(A \times A \times A, \preceq)$ está dado por:



Ordenes lexicográficos

Definición

Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado y sea S un conjunto de cadenas sobre A . La relación de **orden lexicográfico sobre S** (el orden en el diccionario), denotada \preceq , está definida por:

(continua en la próxima diapositiva)

Ordenes lexicográficos

Definición (continuación)

Para cualesquiera dos cadenas $a_1 a_2 \dots a_m, b_1 b_2 \dots b_n \in S$, donde m y n son enteros positivos,

Ordenes lexicográficos

Definición (continuación)

Para cualesquiera dos cadenas $a_1a_2 \dots a_m, b_1b_2 \dots b_n \in S$, donde m y n son enteros positivos,

(i) Si $m \leq n$ y $a_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, m$, entonces

$$a_1a_2 \dots a_m \preceq b_1b_2 \dots b_n.$$

Ordenes lexicográficos

Definición (continuación)

Para cualesquiera dos cadenas $a_1a_2 \dots a_m, b_1b_2 \dots b_n \in S$, donde m y n son enteros positivos,

(i) Si $m \leq n$ y $a_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, m$, entonces

$$a_1a_2 \dots a_m \preceq b_1b_2 \dots b_n.$$

(ii) Si para algún entero k con $k \leq m$, $k \leq n$ y $k \geq 1$, $a_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, k - 1$ y $a_k \neq b_k$ pero $a_k R b_k$ entonces

$$a_1a_2 \dots a_m \preceq b_1b_2 \dots b_n.$$

Ordenes lexicográficos

Definición (continuación)

Para cualesquiera dos cadenas $a_1a_2 \dots a_m, b_1b_2 \dots b_n \in S$, donde m y n son enteros positivos,

(i) Si $m \leq n$ y $a_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, m$, entonces

$$a_1a_2 \dots a_m \preceq b_1b_2 \dots b_n.$$

(ii) Si para algún entero k con $k \leq m$, $k \leq n$ y $k \geq 1$, $a_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, k - 1$ y $a_k \neq b_k$ pero $a_k R b_k$ entonces

$$a_1a_2 \dots a_m \preceq b_1b_2 \dots b_n.$$

(iii) Si ϵ es la cadena nula y $s \in S$, entonces $\epsilon \preceq s$.

Ordenes lexicográficos

Ejemplo 8.5.6

Algunas palabras ordenas de acuerdo al orden en el diccionario.

$$\begin{aligned}x &\preceq xx, \\x &\preceq xy, \\xx &\preceq xxx, \\yxy &\preceq yxyxxx,\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}x &\preceq y, \\xx &\preceq xyx, \\xxx &\preceq xy, \\yxyxxx &\preceq yxyxy,\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\epsilon &\preceq \epsilon, \\ \epsilon &\preceq x, \\ \epsilon &\preceq xy, \\ \epsilon &\preceq yyxy.\end{aligned}$$

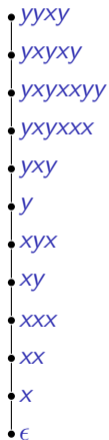
(iii)

(continua en la próxima diapositiva)

Ordenes lexicográficos

Ejemplo 8.5.6 (continuación)

Diagrama de Hasse.



Ordenes lexicográficos

Teorema 8.5.1

Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado y sea S un conjunto de cadenas sobre A . La relación de orden lexicográfico \preceq sobre S es un orden parcial, es decir, el conjunto (S, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado.

Tema

Introducción

Conjuntos parcialmente ordenados

Diagramas de Hasse

Ordenes lexicográficos

Conjuntos totalmente ordenados

Elementos notables

Ordenamiento topológico

Referencias

Relaciones de orden total

Definición

Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Dos elementos $a, b \in A$ son **comparables**, si y solo si, $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

En caso contrario, los elementos a y b son **no comparables**.

Relaciones de orden total

Definición

Sea R una relación de orden parcial sobre un conjunto A . La relación R es una **relación de orden total sobre A** , si y solo si, todos los elementos de A son comparables bajo R .

Conjuntos totalmente ordenados

Definición

Un conjunto A es un **conjunto totalmente ordenado** respecto a una relación \preceq , si y solo si, la relación \preceq es una relación de orden total sobre A .

Conjuntos totalmente ordenados

Ejemplo

Los siguientes conjuntos son conjuntos totalmente ordenados:

- (i) (\mathbf{R}, \leq) .
- (ii) $(A_1 \times \cdots \times A_n, \preceq)$, donde \preceq es el orden lexicográfico.
- (iii) Un conjunto de cadenas ordenadas lexicográficamente.

Conjuntos totalmente ordenados

Ejemplo

Los siguientes conjuntos parcialmente ordenados **no** son conjuntos totalmente ordenados:

- (i) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde A es un conjunto.
- (ii) $(\mathbf{Z}^+, |)$.

Tema

Introducción

Conjuntos parcialmente ordenados

Diagramas de Hasse

Ordenes lexicográficos

Conjuntos totalmente ordenados

Elementos notables

Ordenamiento topológico

Referencias

Elementos notables

Definición

Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado y sea $a \in A$. El elemento a es un elemento **máximo/mayor/mínimo/menor** de A , si para todo $b \in A$,

máximo $\Leftrightarrow b \preceq a$ o b y a son no comparables,

mayor $\Leftrightarrow b \preceq a$,

mínimo $\Leftrightarrow a \preceq b$ o b y a son no comparables,

menor $\Leftrightarrow a \preceq b$.

Elementos notables

Ejemplo

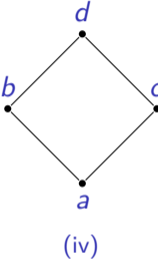
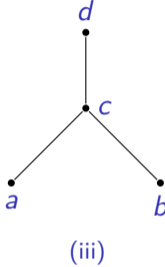
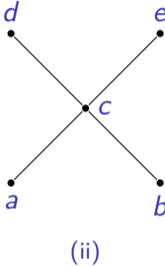
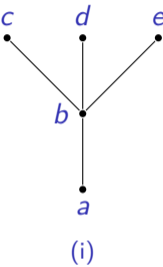


Fig.	Máximos	Mayor	Mínimos	Menor
(i)	<i>c, d, e</i>	no hay	<i>a</i>	<i>a</i>
(ii)	<i>d, e</i>	no hay	<i>a, b</i>	no hay
(iii)	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a, b</i>	no hay
(iv)	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

Elementos notables

Algunas observaciones

- (i) Un elemento mayor es un elemento máximo.
- (ii) Un elemento máximo no necesariamente es un elemento mayor.
- (iii) Un elemento menor es un elemento mínimo.
- (iv) Un elemento mínimo no necesariamente es un elemento menor.
- (v) Si un elemento mayor existe éste es único.
- (vi) Si un elemento menor existe éste es único.

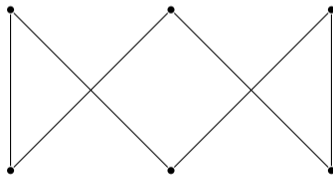
Ejercicio 8.5.43

Dibuje un diagrama de Hasse para un conjunto parcialmente ordenado que tiene tres elementos máximos y tres elementos mínimos y es tal que cada elemento es, ya sea mayor que o menor, que exactamente otros dos elementos.

Ejercicio 8.5.43

Dibuje un diagrama de Hasse para un conjunto parcialmente ordenado que tiene tres elementos máximos y tres elementos mínimos y es tal que cada elemento es, ya sea mayor que o menor, que exactamente otros dos elementos.

Solución



Tema

Introducción

Conjuntos parcialmente ordenados

Diagramas de Hasse

Ordenes lexicográficos

Conjuntos totalmente ordenados

Elementos notables

Ordenamiento topológico

Referencias

Relaciones de orden parcial compatibles

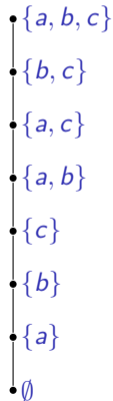
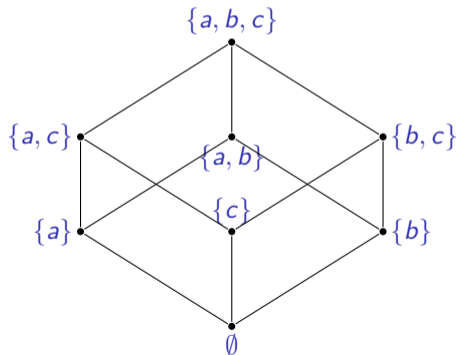
Definición

Sean (A, \preceq) y (A, \preceq') dos ordenes parciales. La relación \preceq' es **compatible** con la relación \preceq , si y solo si, para todo a y b en A , si $a \preceq b$ entonces $a \preceq' b$.

Relaciones de orden parcial compatibles

Ejemplo

Sea $A = \{a, b, c\}$ y sean los ordenes parciales $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}(A), \preceq)$, donde \preceq es la relación de orden parcial indicada en el diagrama de Hasse de la derecha. El orden parcial \preceq es compatible con el orden parcial \subseteq .



Ordenamiento topológico

Definición

Sean (A, \preceq) y (A, \preceq') dos ordenes parciales. La relación \preceq' es un **ordenamiento topológico** para la relación \preceq , si y solo si, \preceq' es un orden total que es compatible con \preceq .

Ordenamiento topológico

Ejemplo

En el ejemplo anterior, el orden total \preceq es un ordenamiento topológico para el orden parcial \subseteq .

Ordenamiento topológico

Construcción de un ordenamiento topológico

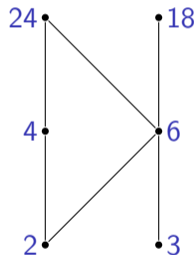
Sea (A, \preceq) un conjunto **finito** parcialmente ordenado. Para construir un ordenamiento topológico \preceq' para \preceq :

1. Elija cualquier elemento mínimo x en A .
2. Sea $A' := A - \{x\}$.
3. Repita los siguientes pasos en tanto $A' \neq \emptyset$.
 - 3.1 Elija cualquier elemento mínimo y en A' .
 - 3.2 Defina $x \preceq' y$.
 - 3.3 Sea $A' := A' - \{y\}$ y $x := y$.

Ordenamiento topológico

Ejemplo 8.5.11

Dado el conjunto parcialmente ordenado $(\{2, 3, 4, 6, 18, 24\}, |)$. Construir un ordenamiento topológico para el orden parcial $|$.



Solución: En el tablero.

Tema

Introducción

Conjuntos parcialmente ordenados

Diagramas de Hasse

Ordenes lexicográficos

Conjuntos totalmente ordenados

Elementos notables

Ordenamiento topológico

Referencias

Referencias



Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.^a ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. [pág. 2](#)).