CM0246 Estructuras Discretas
§ 8.3 Relaciones de equivalencia

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

Preliminares

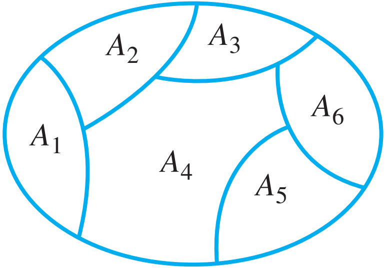
Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Relaciones de equivalencia y particiones



A

Figura 8.3.1.

(i) $A_i \neq \emptyset$,

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$,

(iii) $A = \bigcup A_i$.

Tema

La relación inducida por una partición

Definición

Sea A un conjunto. Una **partición** de A es un conjunto finito o infinito de subconjuntos no vacíos, mutuamente disjuntos, cuya unión es A.

Véase Figura 8.3.1 en la introducción.

La relación inducida por una partición

Definición

Sea A un conjunto con una partición. La **relación inducida por la partición**, es una relación R sobre A definida por: para toda $x, y \in A$,

$$x \, R \, y \quad \Leftrightarrow \quad \text{hay un subconjunto } A_i \text{ de la partición tal que } x, y \in A_i.$$

La relación inducida por una partición

Definición

Sea A un conjunto con una partición. La **relación inducida por la partición**, es una relación R sobre A definida por: para toda $x, y \in A$,

$$x \, R \, y \quad \Leftrightarrow \quad \text{hay un subconjunto } A_i \text{ de la partición tal que } x, y \in A_i.$$

Ejemplo

En el tablero.

La relación inducida por una partición

Teorema 8.3.1

Sea A un conjunto con una partición y sea R la relación inducida por la partición. La relación R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Demostración

En el tablero.

Tema

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. La relación R es una **relación de equivalencia**, si y solo si, es reflexiva, simétrica y transitiva.

Relaciones de equivalencia

Ejemplo

La relación inducida por una partición de un conjunto es una relación de equivalencia.

Relaciones de equivalencia

Ejemplo

La relación de congruencia módulo 3 es una relación de equivalencia (véase Ejemplo 8.2.4).

Relaciones de equivalencia

Ejemplo 8.3.4 (una relación sobre un conjunto de identificadores)

Sea L el conjunto de todos los identificadores permitidos en un cierto lenguaje de programación y sea R una relación sobre L definida por: para todas las cadenas $s, t \in L$,

$$s\,R\,t \quad \Leftrightarrow \quad \text{los ocho primeros caracteres de } s \text{ son iguales a}$$
$$\text{a los ocho primeros caracteres de } t.$$

La relación R es un relación de equivalencia.

Relaciones de equivalencia

Ejercicio

Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$. Definimos la relación de igualdad sobre A por: para todo $x, y \in A$,

$$x \, R \, y \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

¿Es la relación de igualdad sobre A una relación de equivalencia?

Relaciones de equivalencia

Ejercicio

Sea $A \neq \emptyset$. ¿Son las relaciones $\emptyset$ y $A \times A$ relaciones de equivalencia?

Relaciones de equivalencia

Ejemplo

Sea FUN el conjunto de la funciones de $\{0,1\}$ en $\{0,1\}$.

$$\mathrm{FUN} = \{\, f \subseteq \{0,1\} \times \{0,1\} \mid f : \{0,1\} \to \{0,1\} \,\},$$

Definimos una relación R sobre FUN por

$$R = \{\, (f, g) \in \mathrm{FUN} \times \mathrm{FUN} \mid f(1) = g(1) \,\}.$$

La relación R es una relación de equivalencia.

Tema

Clases de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto, R una relación de equivalencia sobre A y $a \in A$. La **clase de equivalencia de $\boldsymbol{a}$**, denotada $[a]$, está definida por:

$$[a] = \{\, x \in A \mid x \, R \, a \,\}.$$

Clases de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto, R una relación de equivalencia sobre A y $a \in A$. La **clase de equivalencia de $\boldsymbol{a}$**, denotada $[a]$, está definida por:

$$[a] = \{\, x \in A \mid x \, R \, a \,\}.$$

La versión procedimental de la definición anterior es la siguiente. Para toda $x \in A$,

$$x \in [a] \quad \Leftrightarrow \quad x \, R \, a.$$

Clases de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto, R una relación de equivalencia sobre A y $a \in A$. La **clase de equivalencia de a**, denotada $[a]$, está definida por:

$$[a] = \{\, x \in A \mid x \, R \, a \,\}.$$

La versión procedimental de la definición anterior es la siguiente. Para toda $x \in A$,

$$x \in [a] \quad \Leftrightarrow \quad x \, R \, a.$$

Notation

La clase de equivalencia de un elemento a bajo una relación de equivalencia R se denota $[a]_R$.

Clases de equivalencia

Ejemplo 8.3.5

Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y sea R la relación sobre A definida por la figura.

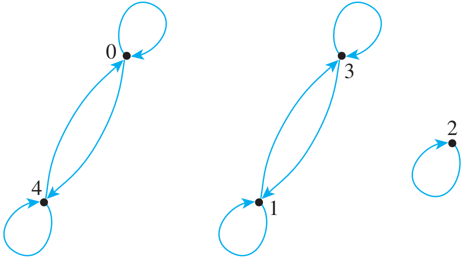


Figura pág. 465.

$$[0] = \{\, x \in A \mid x\, R\, 0 \,\} = \{0, 4\},$$
$$[1] = \{\, x \in A \mid x\, R\, 1 \,\} = \{1, 3\},$$
$$[2] = \{\, x \in A \mid x\, R\, 2 \,\} = \{2\},$$
$$[3] = \{\, x \in A \mid x\, R\, 3 \,\} = \{1, 3\},$$
$$[4] = \{\, x \in A \mid x\, R\, 4 \,\} = \{0, 4\}.$$

Clases de equivalencia de cada elemento.

Clases de equivalencia

Ejemplo 8.3.5

Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y sea R la relación sobre A definida por la figura.

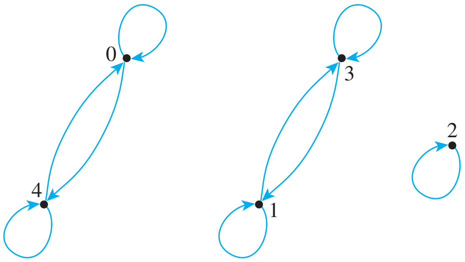


Figura pág. 465.

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{\, x \in A \mid x \, R \, 0 \,\} = \{0, 4\}, \\
[1] &= \{\, x \in A \mid x \, R \, 1 \,\} = \{1, 3\}, \\
[2] &= \{\, x \in A \mid x \, R \, 2 \,\} = \{2\}, \\
[3] &= \{\, x \in A \mid x \, R \, 3 \,\} = \{1, 3\}, \\
[4] &= \{\, x \in A \mid x \, R \, 4 \,\} = \{0, 4\}.
\end{aligned}
$$

Clases de equivalencia de cada elemento.

Las clases de equivalencia del conjunto A bajo la relación R son $\{[0], [1], [2]\}$.

Clases de equivalencia

Ejemplo 8.3.7 (Clases de equivalencia de identificadores)

En el tablero.

Clases de equivalencia

Ejemplo 8.3.7 (Clases de equivalencia de identificadores)

En el tablero.

Ejemplo 8.3.8 (Clases de equivalencia para la relación de identidad)

En el tablero.

Tema

Partición inducida por una relación de equivalencia

Lema 8.3.2

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Para todo $a, b \in A$, si $a \, R \, b$, entonces $[a] = [b]$.

Demostración

En el tablero.

Partición inducida por una relación de equivalencia

Lema 8.3.3

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sean $a, b \in A$, entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$ o $[a] = [b]$.

Partición inducida por una relación de equivalencia

Lema 8.3.3

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sean $a, b \in A$, entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$ o $[a] = [b]$.

(Versión equivalente) Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A, sean $a, b \in A$ y $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, entonces $[a] = [b]$.

Partición inducida por una relación de equivalencia

Lema 8.3.3

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sean $a, b \in A$, entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$ o $[a] = [b]$.

(Versión equivalente) Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A, sean $a, b \in A$ y $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, entonces $[a] = [b]$.

Demostración

En el tablero.

Partición inducida por una relación de equivalencia

Teorema 8.3.4 (partición inducida por una relación de equivalencia)

Si A es un conjunto y R es una relación de equivalencia sobre A, entonces las clases de equivalencia de R inducen una partición de A.

Partición inducida por una relación de equivalencia

Teorema 8.3.4 (partición inducida por una relación de equivalencia)

Si A es un conjunto y R es una relación de equivalencia sobre A, entonces las clases de equivalencia de R inducen una partición de A.

Demostración

Debemos demostrar

(i) La unión de las clases de equivalencia es el conjunto A.

(ii) Las clases de equivalencia son disjuntas.

En el tablero.

Tema

Congruencias módulo n

Ejemplo 8.3.10 (clases de equivalencia de la relación de congruencia módulo 3)

Sea R la relación sobre $\mathbf{Z}$ definida por: para todo $a, b \in \mathbf{Z}$,

$$a \, R \, b \quad \Leftrightarrow \quad 3 \mid (a - b).$$

Congruencias módulo n

Ejemplo 8.3.10 (clases de equivalencia de la relación de congruencia módulo 3)

Sea R la relación sobre $\mathbf{Z}$ definida por: para todo $a, b \in \mathbf{Z}$,

$$a\,R\,b \quad \Leftrightarrow \quad 3 \mid (a-b).$$

Para $a \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}
[a] &= \{\, x \in \mathbf{Z} \mid x\,R\,a \,\} \\
&= \{\, x \in \mathbf{Z} \mid 3 \text{ divide a } (x-a) \,\} \\
&= \{\, x \in \mathbf{Z} \mid x - a = 3k, \text{ para algún entero } k \,\} \\
&= \{\, x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k + a, \text{ para algún entero } k \,\}.
\end{aligned}$$

Congruencias módulo n

Ejemplo 8.3.10 (continuación)

Las clases de equivalencia para 0, 1 y 2 son:

$$\begin{aligned}[0] &= \{\, x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k + 0, \text{ para algún entero } k \,\} \\ &= \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1] &= \{\, x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k + 1, \text{ para algún entero } k \,\} \\ &= \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2] &= \{\, x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k + 2, \text{ para algún entero } k \,\} \\ &= \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}.\end{aligned}$$

Congruencias módulo n

Ejemplo 8.3.10 (continuación)

Desde que $3\,R\,0$ entonces $[3] = [0]$.

Congruencias módulo n

Ejemplo 8.3.10 (continuación)

Desde que $3\,R\,0$ entonces $[3] = [0]$.

En general,

$$
\begin{aligned}
&[0] = [3] = [-3] = [6] = [-6] \ldots, \\
&[1] = [4] = [-2] = [7] = [-5] \ldots, \\
&[2] = [5] = [-1] = [8] = [-4] \ldots.
\end{aligned}
$$

Congruencias módulo n

Ejemplo 8.3.10 (continuación)

Las clases de equivalencia para la relación de congruencia módulo 3 son:

$$[0] = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k + 0, \text{ para algún entero } k \},$$
$$[1] = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k + 1, \text{ para algún entero } k \},$$
$$[2] = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k + 2, \text{ para algún entero } k \}.$$

Congruencias módulo n

Ejemplo 8.3.10 (continuación)

Las clases de equivalencia para la relación de congruencia módulo 3 son:

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{\, x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k + 0, \text{ para algún entero } k \,\},\\
[1] &= \{\, x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k + 1, \text{ para algún entero } k \,\},\\
[2] &= \{\, x \in \mathbf{Z} \mid x = 3k + 2, \text{ para algún entero } k \,\}.
\end{aligned}
$$

Es decir, las clases de equivalencia son

(i) el conjunto de números enteros $\mathbf{Z}$ que son divisibles por 3,

(ii) el conjunto de números enteros $\mathbf{Z}$ que dejan un residuo de 1 cuando se dividen por 3 y

(iii) el conjunto de números enteros $\mathbf{Z}$ que dejan un residuo de 2 cuando se dividen por 3.

Congruencias módulo n

Definición

Sean a y b números enteros y sea n un número entero positivo. El número ***a* es congruente con *b* módulo *n***, denotado por $a \equiv b \pmod{n}$, si y solo si, $n \mid (a-b)$, es decir,

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \mid (a-b).$$

Congruencias módulo n

Definición

Sean a y b números enteros y sea n un número entero positivo. El número $\boldsymbol{a}$ **es congruente con** $\boldsymbol{b}$ **módulo** $\boldsymbol{n}$, denotado por $a \equiv b \pmod{n}$, si y solo si, $n \mid (a-b)$, es decir,

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \mid (a-b).$$

Ejemplo

En el tablero.

Tema

Referencias

Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).