CM0246 Estructuras Discretas
§ 6.2 Propiedades de conjuntos

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Versiones procesadas de las definiciones de conjunto

Definición

Para demostrar propiedades de conjuntos es conveniente emplear las siguientes **versiones procesadas de las definiciones de conjunto**:*

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup B &\quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ o } x \in B, \\
x \in A \cap B &\quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ y } x \in B, \\
x \in A - B &\quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ y } x \notin B, \\
x \in A^{\mathrm{c}} &\quad \Leftrightarrow \quad x \notin A, \\
(x, y) \in A \times B &\quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ y } y \in B,
\end{aligned}
$$

donde A y B son subconjuntos de un conjunto universo $\mathbb{U}$ y x y y son elementos de $\mathbb{U}$.

*El texto en inglés llama estas definiciones «*procedural versions of set definitions*» lo cual no corresponde con la traducción realizada.

Versiones procesadas de las definiciones de conjunto

Ejercicio

Indicar la versión procesada de las definiciones de conjunto correcta.

(i) $A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ y } x \notin B$

(ii) $x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ y } x \notin B$

(iii) $x \in A - B \quad = \quad x \in A \text{ y } x \notin B$

(iv) $A - B \quad = \quad x \in A \text{ y } x \notin B$

Tema

Algunas relaciones de subconjuntos

Convención

Las operaciones de unión, intersección y diferencia tienen mayor precedencia que la inclusión de conjuntos.

Algunas relaciones de subconjuntos

Convención

Las operaciones de unión, intersección y diferencia tienen mayor precedencia que la inclusión de conjuntos.

Ejemplo

«$A \cap B \subseteq C$» significa «$(A \cap B) \subseteq C$».

Algunas relaciones de subconjuntos

Teorema 6.2.1

Sean A, B y C conjuntos.

$A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$ (inclusión de intersección)

$A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$ (inclusión en la unión)

si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$ (transitividad de subconjuntos)

Algunas relaciones de subconjuntos

Ejemplo 6.2.1

Sean A y B conjuntos. Demostrar que $A \cap B \subseteq A$.

Demostración

En el tablero.

Algunas relaciones de subconjuntos

Ejemplo

Sean A, B y C conjuntos. Demostrar que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

(continua en la próxima diapositiva)

Algunas relaciones de subconjuntos

Demostración

Supongamos que A, B y C son conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Sea $x \in A$. Puesto que $A \subseteq B$ entonces $x \in B$. Y puesto que $B \subseteq C$ entonces $x \in C$. Por lo tanto, si $x \in A$ implica que $x \in C$, es decir, $A \subseteq C$.

Algunas relaciones de subconjuntos

Demostración

Supongamos que A, B y C son conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Sea $x \in A$. Puesto que $A \subseteq B$ entonces $x \in B$. Y puesto que $B \subseteq C$ entonces $x \in C$. Por lo tanto, si $x \in A$ implica que $x \in C$, es decir, $A \subseteq C$.

1	$A \subseteq B$	
2	$B \subseteq C \quad / \therefore\ A \subseteq C$	
3	$\forall x\,(x \in A \to x \in B)$	Def. $\subseteq$, 1
4	$\forall x\,(x \in B \to x \in C)$	Def. $\subseteq$, 2
5	$x \in A \to x \in B$	UI 3
6	$x \in B \to x \in C$	UI 4
7	$\quad x \in A$	ACP
8	$\quad x \in B$	MP 5, 7
9	$\quad x \in C$	MP 6, 8
10	$x \in A \to x \in C$	CP 7–9
11	$\forall x\,(x \in A \to x \in C)$	UG 10
12	$A \subseteq C$	Def. $\subseteq$, 11

Algunas relaciones de subconjuntos

Ejercicio 20

Encuentre el error en la siguiente «demostración» que para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

«Demostración: Suponga que A, B y C son conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Ya que $A \subseteq B$, hay un elemento x tal que $x \in A$ y $x \in B$. Ya que $B \subseteq C$, hay un elemento x tal que $x \in B$ y $x \in C$. Por lo que hay un elemento x tal que $x \in A$ y $x \in C$ y por tanto $A \subseteq C$».

Tema

Identidades entre conjuntos

Teorema 6.2.2

Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto universal $\mathbb{U}$. Entonces

Nombre	Identidades
Leyes conmutativas	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Leyes asociativas	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leyes distributivas	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Identidades entre conjuntos

Teorema 6.2.2 (continuación)

Nombre	Identidades
Leyes de identidad	$A \cap \mathbb{U} = A$ $A \cup \emptyset = A$
Leyes de complemento	$A \cup A^{\mathrm{c}} = \mathbb{U}$ $A \cap A^{\mathrm{c}} = \emptyset$
Ley de complemento doble	$(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = A$

Identidades entre conjuntos

Teorema 6.2.2 (continuación)

Nombre	Identidades
Leyes de idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Leyes de universos acotados	$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Leyes de De Morgan	$(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$ $(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$

Identidades entre conjuntos

Teorema 6.2.2 (continuación)

Nombre	Identidades
Leyes de absorción	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Complementos de $\mathbb{U}$ y $\emptyset$	$\mathbb{U}^{\mathrm{c}} = \emptyset$ $\emptyset^{\mathrm{c}} = \mathbb{U}$
Ley de diferencia de conjuntos	$A - B = A \cap B^{\mathrm{c}}$

Identidades entre conjuntos

Observación

Sean A y B dos conjuntos. Recuerde que

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A,$$

y por lo tanto podemos emplear el método del argumento del elemento para demostrar la igualdad entre conjuntos.

Identidades entre conjuntos

Ejemplo 6.2.2

Sean A, B y C conjuntos. Demostrar que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Demostración

En el tablero.

Identidades entre conjuntos

Ejemplo 6.2.3

Sean A y B conjuntos. Demostrar que

$$(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}.$$

Demostración

En el tablero.

Tema

Conjunto vacío

Teorema 6.24

Si E es un conjunto sin elementos y A es cualquier conjunto, entonces, $E \subseteq A$.

Demostración (por contradicción)

En el tablero.

Conjunto vacío

Teorema 6.24

Si E es un conjunto sin elementos y A es cualquier conjunto, entonces, $E \subseteq A$.

Demostración (por contradicción)

En el tablero.

Demostración por «verdad vacía»

Que $E \subseteq A$ significa que

$$\forall x, \text{ si } x \in E, \text{ entonces } x \in A.$$

¿Es el anterior enunciado verdadero?

Conjunto vacío

Corolario 6.2.5 (unicidad del conjunto vacío)

Hay solo un conjunto sin elementos.

Demostración

En el tablero.

Conjunto vacío

Método del elemento para demostrar que un conjunto es igual al conjunto vacío

«Demostrar que un conjunto X es igual al conjunto vacío $\emptyset$, equivale a demostrar que X no tiene elementos. Para esto, suponga que X tiene un elemento y se deduce una contradicción.» [pág. 362]

Conjunto vacío

Ejemplo 6.2.4

Sea A un conjunto. Demostrar que $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Demostración (por contradicción)

En el tablero.

Conjunto vacío

Ejemplo 6.2.5

Demostrar que para todos los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C^{\mathrm{c}}$, entonces $A \cap C = \emptyset$.

Demostración (por contradicción)

En el tablero.

Tema

Referencias

Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).