# CM0246 Estructuras Discretas
# § 5.4 Inducción matemática fuerte y el principio del buen orden

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

# Preliminares

## Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

# Esquema de la presentación

# Tema

## Introducción

# Introducción

## Descripción

- La inducción matemática fuerte es un método de demostración.

# Introducción

## Descripción

- La inducción matemática fuerte es un método de demostración.
- La inducción matemática fuerte está sustentada en el principio de inducción matemática fuerte.

# Introducción

## Descripción

- La inducción matemática fuerte es un método de demostración.
- La inducción matemática fuerte está sustentada en el principio de inducción matemática fuerte.
- A diferencia de la inducción matemática, en la inducción matemática fuerte «el paso básico puede contener demostraciones para varios valores iniciales y en el paso inductivo la veracidad del predicado $P(n)$ se supone no solo para un valor de $n$, sino para todos los valores $k$ y después se demuestra la veracidad de $P(k+1)$.» [p. 268]

# Tema

# Principio de inducción matemática fuerte

## Principio de inducción matemática (pág. 268)

Sea $P(n)$ una propiedad que se define para números naturales $n$ y sean $a$ y $b$ números naturales fijos con $a \leq b$. Suponga que los siguientes dos enunciados son verdaderos:

(i) Las propiedades $P(a)$, $P(a+1)$, ..., $P(b)$ son verdaderas.

(ii) Para cualquier número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales $i$ desde $a$ hasta $k$, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Entonces, el enunciado

$$\text{para todo número natural } n \geq a,\ P(n)$$

es verdadero.

# Principio de inducción matemática fuerte

## Observaciones

- El texto guía presenta el principio de inducción matemática fuerte empleando el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, pero nosotros consideramos que es más apropiado emplear el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en su presentación.

# Principio de inducción matemática fuerte

## Observaciones

- El texto guía presenta el principio de inducción matemática fuerte empleando el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, pero nosotros consideramos que es más apropiado emplear el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en su presentación.
- Un enunciado se puede demostrar empleando inducción matemática, si y solo si, el enunciado se puede demostrar empleando inducción matemática fuerte.

# Principio de inducción matemática fuerte

## Observaciones

- El texto guía presenta el principio de inducción matemática fuerte empleando el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, pero nosotros consideramos que es más apropiado emplear el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en su presentación.
- Un enunciado se puede demostrar empleando inducción matemática, si y solo si, el enunciado se puede demostrar empleando inducción matemática fuerte.
- Otros nombres para el principio de inducción matemática fuerte son: segundo principio de inducción y principio de inducción completa.

# Tema

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales $n$.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales $n$.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar los números naturales $a$ y $b$ fijos tales que $a \leq b$.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Pasos a seguir

1. Señalar la propiedad $P(n)$ para números naturales $n$.
2. Señalar el enunciado a demostrar e identificar los números naturales $a$ y $b$ fijos tales que $a \leq b$.
3. **Paso básico:** Demostrar que $P(a)$, $P(a+1)$, ..., $P(b)$ son verdaderas.

(continua en la próxima diapositiva)

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Pasos a seguir (continuación)

4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales $i$ desde $a$ hasta $k$, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Pasos a seguir (continuación)

4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales $i$ desde $a$ hasta $k$, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Sea $k \geq b$. Suponer que $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales $i$ desde $a$ hasta $k$.

   De forma equivalente, suponer que $P(a)$, $P(a+1)$, $\ldots$, $P(k)$ son verdaderas.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Pasos a seguir (continuación)

4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales $i$ desde $a$ hasta $k$, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Sea $k \geq b$. Suponer que $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales $i$ desde $a$ hasta $k$.

   De forma equivalente, suponer que $P(a)$, $P(a+1)$, $\ldots$, $P(k)$ son verdaderas.

   4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq b$.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Pasos a seguir (continuación)

4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales $i$ desde $a$ hasta $k$, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Sea $k \geq b$. Suponer que $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales $i$ desde $a$ hasta $k$.

   De forma equivalente, suponer que $P(a)$, $P(a+1)$, $\ldots$, $P(k)$ son verdaderas.

   4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq b$.

   4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq b$.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Pasos a seguir (continuación)

4. **Paso inductivo:** Demostrar que para todo número natural $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales $i$ desde $a$ hasta $k$, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

   Para realizar el paso inductivo:

   4.1 Suponer la **hipótesis inductiva:** Sea $k \geq b$. Suponer que $P(i)$ es verdadera para todo los números naturales $i$ desde $a$ hasta $k$.

   De forma equivalente, suponer que $P(a)$, $P(a+1)$, $\ldots$, $P(k)$ son verdaderas.

   4.2 Indicar lo que se va a demostrar: $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq b$.

   4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera para todo $k \geq b$.

5. Concluir que el enunciado del paso 2 es verdadero por el principio de inducción matemática fuerte.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Ejemplo 5.4.1 (divisibilidad por un número primo)

Demostrar que cualquier número natural mayor que $1$ es divisible por un número primo.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

### Ejemplo 5.4.1 (divisibilidad por un número primo)

Demostrar que cualquier número natural mayor que $1$ es divisible por un número primo.

### Demostración por inducción matemática fuerte

1. La propiedad $P(n)$ está dada por:

   $P(n)$: $n$ es divisible por un número primo

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Ejemplo 5.4.1 (divisibilidad por un número primo)

Demostrar que cualquier número natural mayor que $1$ es divisible por un número primo.

## Demostración por inducción matemática fuerte

1. La propiedad $P(n)$ está dada por:

   $P(n)$: $n$ es divisible por un número primo

2. Vamos a demostrar que el enunciado

   $$\text{para todo número natural } n > 1, \ P(n)$$

   es verdadero. Además, $a = b = 2$.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

### Ejemplo 5.4.1 (divisibilidad por un número primo)

Demostrar que cualquier número natural mayor que $1$ es divisible por un número primo.

### Demostración por inducción matemática fuerte

1. La propiedad $P(n)$ está dada por:

   $P(n)$: $n$ es divisible por un número primo

2. Vamos a demostrar que el enunciado

   $$\text{para todo número natural } n > 1, \ P(n)$$

   es verdadero. Además, $a = b = 2$.

3. Paso básico:

   $P(2)$ es verdadera porque $2$ es divisible por $2$ y $2$ es un número primo.

(continua en la próxima diapositiva)

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Demostración por inducción matemática fuerte (continuación)

4. Paso inductivo: Demostración de que para todo número natural $k \geq 2$, si $P(i)$ es verdadera para todo número natural $i$ desde $2$ hasta $k$, entonces $P(k+1)$ también es verdadera.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Demostración por inducción matemática fuerte (continuación)

4. Paso inductivo: Demostración de que para todo número natural $k \geq 2$, si $P(i)$ es verdadera para todo número natural $i$ desde $2$ hasta $k$, entonces $P(k+1)$ también es verdadera.

   4.1 Hipótesis inductiva: Sea $k \geq 2$ un número natural. Supongamos que $P(i)$ para todo número natural $i$ desde $2$ hasta $k$. Es decir, supongamos que $i$ es divisible por un número primo, para $i$ desde $2$ hasta $k$.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Demostración por inducción matemática fuerte (continuación)

4. Paso inductivo: Demostración de que para todo número natural $k \geq 2$, si $P(i)$ es verdadera para todo número natural $i$ desde $2$ hasta $k$, entonces $P(k+1)$ también es verdadera.

   4.1 Hipótesis inductiva: Sea $k \geq 2$ un número natural. Supongamos que $P(i)$ para todo número natural $i$ desde $2$ hasta $k$. Es decir, supongamos que $i$ es divisible por un número primo, para $i$ desde $2$ hasta $k$.

   4.2 Sea $k \geq 2$, vamos a demostrar $P(k+1)$, es decir vamos a demostrar que $k+1$ es divisible por un número primo.

## Demostración por inducción matemática fuerte (continuación)

4. Paso inductivo: Demostración de que para todo número natural $k \geq 2$, si $P(i)$ es verdadera para todo número natural $i$ desde $2$ hasta $k$, entonces $P(k+1)$ también es verdadera.

   4.1 Hipótesis inductiva: Sea $k \geq 2$ un número natural. Supongamos que $P(i)$ para todo número natural $i$ desde $2$ hasta $k$. Es decir, supongamos que $i$ es divisible por un número primo, para $i$ desde $2$ hasta $k$.

   4.2 Sea $k \geq 2$, vamos a demostrar $P(k+1)$, es decir vamos a demostrar que $k+1$ es divisible por un número primo.

   4.3 Demostrar que $P(k+1)$ es verdadera

   En el tablero.

(continua en la próxima diapositiva)

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Demostración por inducción matemática fuerte (continuación)

5. Por lo tanto, el enunciado

   para todo número natural $n > 1$, $n$ es divisible por un número primo

   es verdadero por el principio de inducción matemática fuerte. ∎

# Sucesiones infinitas

## Definición

Una **sucesión infinita** es una función del conjunto de los números enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ (o del conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$) a un conjunto $A$.*

## Notation

Una sucesión infinita $\mathbf{Z}^+ \to A$ es denotada por

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad \text{o} \quad \{a_n : n \in \mathbf{Z}^+\} \quad \text{o} \quad \{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}^+}.$$

y una sucesión infinita $\mathbf{N} \to A$ es denotada por

$$a_0, a_1, a_2, \ldots \quad \text{o} \quad \{a_n : n \in \mathbf{N}\} \quad \text{o} \quad \{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

*El texto en la sección § 5.1 presenta una definición general de sucesión que incluye las sucesiones infinitas.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

Ejemplo 5.4.2 (una propiedad de una sucesión)

Sea $s_0, s_1, s_2, \ldots$ la sucesión definida recursivamente por

$$s_0 = 0,$$
$$s_1 = 4,$$
$$s_k = 6s_{k-1} - 5s_{k-2}, \text{ para todo número natural } k \geq 2.$$

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Ejemplo 5.4.2 (una propiedad de una sucesión)

Sea $s_0, s_1, s_2, \ldots$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, \\ s_1 &= 4, \\ s_k &= 6s_{k-1} - 5s_{k-2}, \text{ para todo número natural } k \geq 2. \end{aligned}$$

Demostrar que para todo número natural $n$,

$$s_n = 5^n - 1.$$

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Ejemplo 5.4.2 (una propiedad de una sucesión)

Sea $s_0, s_1, s_2, \ldots$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, \\ s_1 &= 4, \\ s_k &= 6s_{k-1} - 5s_{k-2}, \text{ para todo número natural } k \geq 2. \end{aligned}$$

Demostrar que para todo número natural $n$,

$$s_n = 5^n - 1.$$

## Demostración por inducción matemática fuerte

En el tablero.

# Método de demostración por inducción matemática fuerte

## Ejercicio

Demostrar por inducción matemática fuerte que para todo número natural $n \geq 1$, el número

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

es impar.

# Tema

# El principio del buen orden

## Principio del buen orden para los números naturales

Sea $S$ un subcojunto del conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$ diferente de vacío. Entonces $S$ tiene un mínimo elemento.

# El principio del buen orden

## Principio del buen orden para los números naturales

Sea $S$ un subcojunto del conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$ diferente de vacío. Entonces $S$ tiene un mínimo elemento.

## Principio del buen orden para los números enteros

«Sea $S$ un conjunto de números enteros que contiene uno o más números enteros todos los cuales son mayores que un entero fijo. Entonces $S$ tiene un mínimo elemento.» [p. 275]

# El principio del buen orden

## Principio del buen orden para los números naturales

Sea $S$ un subcojunto del conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$ diferente de vacío. Entonces $S$ tiene un mínimo elemento.

## Principio del buen orden para los números enteros

«Sea $S$ un conjunto de números enteros que contiene uno o más números enteros todos los cuales son mayores que un entero fijo. Entonces $S$ tiene un mínimo elemento.» [p. 275]

## Observación

El texto guía no presenta el principio del buen orden para los números naturales.

# El principio del buen orden

## Ejemplo

Demostrar que cualquier sucesión estrictamente decreciente de números naturales es finita.

# El principio del buen orden

## Ejemplo

Demostrar que cualquier sucesión estrictamente decreciente de números naturales es finita.

## Demostración

Sea $r_1, r_2, r_3, \ldots$ una sucesión de números naturales tal que $r_i > r_{i+1}$ para todo $i$.

# El principio del buen orden

## Ejemplo

Demostrar que cualquier sucesión estrictamente decreciente de números naturales es finita.

## Demostración

Sea $r_1, r_2, r_3, \ldots$ una sucesión de números naturales tal que $r_i > r_{i+1}$ para todo $i$.

Por el principio del buen orden para los números naturales, sea $r_k$ el elemento mínimo de la sucesión. Entonces $r_k$ es el último término de la sucesión. De lo contrario, existe $r_{k+1}$ tal que $r_k > r_{k+1}$ lo cual es una contradicción porque $r_k$ es el elemento mínimo. ∎

# El principio del buen orden

### Teorema

Los siguientes principios son equivalentes:

(i) Principio de inducción matemática

(ii) Principio de inducción matemática fuerte

(iii) Principio del buen orden para los números naturales

# Tema

# Agradecimientos

Agradezco a mi colega René Alejandro Londoño Cano por señalarme algunas correcciones a una versión anterior de estas diapositivas.

# Tema

# Referencias

Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).