CM0246 Estructuras Discretas
§ 7.1 Funciones definidas sobre conjuntos generales

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Relaciones binarias

Definición de función

Igualdad de funciones

Funciones booleanas

Funciones actuando sobre conjuntos

Referencias

Tema

Relaciones binarias

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Recordemos que el **producto cartesiano de** A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \,\}.$$

Relaciones binarias

Definición

- Sean A y B conjuntos. Una **relación binaria $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$** es un subconjunto de $A \times B$.

Relaciones binarias

Definición

- Sean A y B conjuntos. Una **relación binaria $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$** es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $(x, y) \in A \times B$ un par ordenado. **El elemento $\boldsymbol{x}$ está relacionado con el elemento $\boldsymbol{y}$ por la relación $\boldsymbol{R}$**, denotado $x\,R\,y$, si y solo si, $(x, y) \in R$.

Relaciones binarias

Definición

- Sean A y B conjuntos. Una **relación binaria $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$** es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $(x, y) \in A \times B$ un par ordenado. **El elemento $\boldsymbol{x}$ está relacionado con el elemento $\boldsymbol{y}$ por la relación $\boldsymbol{R}$**, denotado $x\,R\,y$, si y solo si, $(x, y) \in R$.
- El conjunto A es el **dominio** de R y el conjunto B es el **codominio** de R.

Relaciones binarias

Definición

- Sean A y B conjuntos. Una **relación binaria $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$** es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $(x, y) \in A \times B$ un par ordenado. **El elemento $\boldsymbol{x}$ está relacionado con el elemento $\boldsymbol{y}$ por la relación $\boldsymbol{R}$**, denotado $x \, R \, y$, si y solo si, $(x, y) \in R$.
- El conjunto A es el **dominio** de R y el conjunto B es el **codominio** de R.

Observación

La definición de relación binaria está en la Sección 1.3.

Relaciones binarias

Notation

$$
\begin{aligned}
x \, R \, y \quad &\Leftrightarrow \quad (x, y) \in R, \\
x \, \not R \, y \quad &\Leftrightarrow \quad (x, y) \notin R.
\end{aligned}
$$

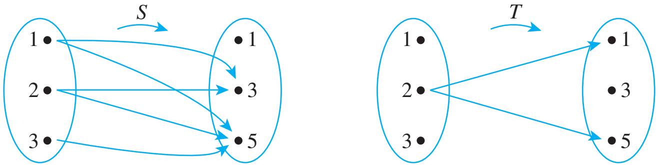
Relaciones binarias

Ejemplo 1.3.3 (diagramas de flechas)

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y las relaciones S y T de A en B definidas por

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow x < y, \qquad T = \{(2, 1), (2, 5)\}.$$

Diagramas de flechas para las relaciones S y T (figura pág. 16).



Relaciones binarias

Ejemplo

En el tablero.

Relaciones binarias

Ejemplo

En el tablero.

Ejemplo

Sean A y B conjuntos. Note que $R = \emptyset$ y $S = A \times B$ son relaciones de A en B. Estas relaciones son llamadas **relaciones triviales**.

Tema

Definición de función

Definición

Sean X y Y dos conjuntos. Una **función f de X a Y**, denotada $f : X \to Y$, es una relación de X en Y que satisface dos propiedades:

(i) cada elemento en X está relacionado con algún elemento en Y,

(ii) ningún elemento en X está relacionado con más de un elemento en Y.

Definición de función

Algunas definiciones

Sea f una función de X a Y.

- El **dominio** de f es el conjunto X.
- El **codominio** de f es el conjunto Y.

Definición de función

Algunas definiciones

Sea f una función de X a Y.

- El **dominio** de f es el conjunto X.
- El **codominio** de f es el conjunto Y.
- El símbolo «$f(x)$» denota el único elemento en Y con el cual está relacionado x vía la función f.

  El símbolo «$f(x)$» se lee $\boldsymbol{f}$ **de** $\boldsymbol{x}$ o también **la imagen de** $\boldsymbol{x}$ **bajo** $\boldsymbol{f}$.

Definición de función

Algunas definiciones (continuación)

- El **rango** de la función f es el conjunto

$$\{\, y \in Y \mid y = f(x), \text{para alguna } x \text{ en } X \,\}.$$

Definición de función

Algunas definiciones (continuación)

- El **rango** de la función f es el conjunto

$$\{\, y \in Y \mid y = f(x), \text{para alguna } x \text{ en } X \,\}.$$

- Si $f(x) = y$ entonces x es una **pre-imagen** o **imagen inversa** de y.

Definición de función

Algunas definiciones (continuación)

- El **rango** de la función f es el conjunto

$$\{\, y \in Y \mid y = f(x), \text{para alguna } x \text{ en } X \,\}.$$

- Si $f(x) = y$ entonces x es una **pre-imagen** o **imagen inversa** de y.
- **La imagen inversa de y** es el conjunto

$$\{\, x \in X \mid f(x) = y \,\}.$$

Definición de función

Ejemplo

En el tablero.

Definición de función

Ejemplo

En el tablero.

Pregunta

¿Es el conjunto $\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$ una función?

Definición de función

Ejemplo

En el tablero.

Pregunta

¿Es el conjunto $\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$ una función?

Pregunta

¿Es la regla $I(x) = x$ una función?

Definición de función

Ejemplo
En el tablero.

Pregunta
¿Es el conjunto $\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$ una función?

Pregunta
¿Es la regla $I(x) = x$ una función?

Discusión
Las funciones se pueden especificar explícitamente o por medio de una regla. ¿La especificación por reglas satisface la definición de función?

Tema

Igualdad de funciones

Teorema 7.1.1
Sean $F : X \to Y$ y $G : X \to Y$ dos funciones. Entonces

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x), \text{ para toda } x \in X.$$

Igualdad de funciones

Teorema 7.1.1

Sean $F : X \to Y$ y $G : X \to Y$ dos funciones. Entonces

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x), \text{ para toda } x \in X.$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $F = G$, entonces para toda $x \in X$,

$$\begin{aligned} y = F(x) &\Leftrightarrow (x, y) \in F \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in G \\ &\Leftrightarrow y = G(x), \end{aligned}$$

es decir, $F(x) = G(x)$.

Igualdad de funciones

Teorema 7.1.1

Sean $F : X \to Y$ y $G : X \to Y$ dos funciones. Entonces

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x), \text{ para toda } x \in X.$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $F = G$, entonces para toda $x \in X$,

$$\begin{aligned} y = F(x) &\Leftrightarrow (x, y) \in F \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in G \\ &\Leftrightarrow y = G(x), \end{aligned}$$

es decir, $F(x) = G(x)$.

($\Leftarrow$) Si $F(x) = G(x)$, para toda $x \in X$, entonces sea $x \in X$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in F &\Leftrightarrow y = F(x) \\ &\Leftrightarrow y = G(x) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in G, \end{aligned}$$

es decir, $F = G$. ■

Igualdad de funciones

Teorema 7.1.1

Sean $F : X \to Y$ y $G : X \to Y$ dos funciones. Entonces

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x), \text{ para toda } x \in X.$$

Observación

La igual establecida por el teorema anterior es la igualdad **extensional** de funciones.

Igualdad de funciones

Teorema 7.1.1
Sean $F : X \to Y$ y $G : X \to Y$ dos funciones. Entonces

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = G(x), \text{ para toda } x \in X.$$

Observación
La igual establecida por el teorema anterior es la igualdad **extensional** de funciones.

Observación
La igualdad extensional entre funciones no siempre es suficiente para comparar funciones. Piense por ejemplo en la comparación de los diferentes algoritmos de ordenamiento.

Tema

Funciones booleanas

Notation

Sea A un conjunto y sea $n \in \boldsymbol{Z}^+$. La notación A^n denota $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ veces}}$.

Funciones booleanas

Notation

Sea A un conjunto y sea $n \in \boldsymbol{Z}^{+}$. La notación A^n denota $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ veces}}$.

Definición

Una **función booleana** es una función de $\{0,1\}^n$ a $\{0,1\}$.

Ejemplo

En el tablero.

Tema

Funciones actuando sobre conjuntos

Definición

Sean $f : X \to Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

- La **imagen** del conjunto A, denotada $f(A)$, está definida por

$$f(A) = \{\, y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } A \,\}.$$

Funciones actuando sobre conjuntos

Definición

Sean $f : X \to Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

- La **imagen** del conjunto A, denotada $f(A)$, está definida por
$$f(A) = \{\, y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } A \,\}.$$
- La **imagen inversa** del conjunto B, denotada $f^{-1}(B)$, está definida por
$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \mid f(x) \in B \,\}.$$

Funciones actuando sobre conjuntos

Definición

Sean $f : X \to Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

- La **imagen** del conjunto A, denotada $f(A)$, está definida por

$$f(A) = \{\, y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } A \,\}.$$

- La **imagen inversa** del conjunto B, denotada $f^{-1}(B)$, está definida por

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \mid f(x) \in B \,\}.$$

Observación

En el texto la notación «$f^{-1}(\cdot)$» se emplea con dos significados diferentes: En el primer caso denota la imagen inversa de un conjunto y en el segundo caso denotará (Sección 7.2) la función inversa de una función f.

Funciones actuando sobre conjuntos

Ejemplo

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$. Definimos la función

$$F : \mathcal{P}(A) \to \mathbf{Z}$$
$$F(S) = \text{número de elementos en } S.$$

Entonces

$$\begin{aligned} F(\{1, 2\}) &= 2, \\ F(\emptyset) &= 0, \\ F(B) &= \{1, 3\}, \\ F^{-1}(\mathbf{Z}^{+}) &= \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

Tema

Referencias

Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).