CM0246 Estructuras Discretas
§ 7.3 Composición de funciones

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Función compuesta

Introducción

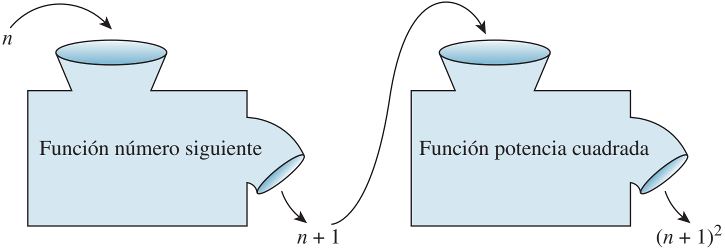


Figura pág. 417.

Función compuesta

Definición

Sean $f : X \to Y'$ y $g : Y \to Z$ dos funciones. Sea además el rango de f subconjunto del dominio de g. La **composición** de g después de f, denotada $g \circ f$, es la función definida por:

$$g \circ f : X \to Z$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

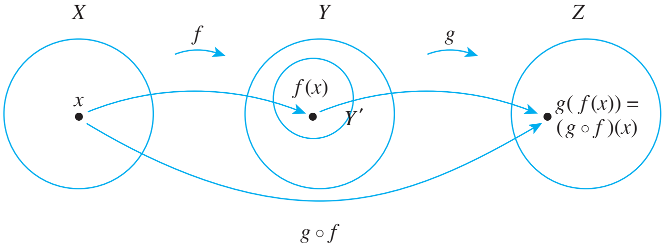


Figura pág. 417.

Función compuesta

Observación

En general, la composición de funciones no es conmutativa.

Función compuesta

Observación

En general, la composición de funciones no es conmutativa.

Ejemplo

En el tablero.

Tema

Composición con la función identidad

Ejemplo

En el tablero.

Composición con la función identidad

Teorema 7.3.1

Sea $f : X \to Y$ una función y sean $\mathrm{I}_X : X \to X$ e $\mathrm{I}_Y : Y \to Y$ las funciones identidad para los conjuntos X y Y, respectivamente. Entonces

$$f \circ \mathrm{I}_X : X \to Y \qquad \mathrm{I}_Y \circ f : X \to Y$$

$$f \circ \mathrm{I}_X = f, \qquad \mathrm{I}_Y \circ f = f.$$

Composición con la función identidad

Teorema 7.3.1

Sea $f : X \to Y$ una función y sean $\mathrm{I}_X : X \to X$ e $\mathrm{I}_Y : Y \to Y$ las funciones identidad para los conjuntos X y Y, respectivamente. Entonces

$$f \circ \mathrm{I}_X : X \to Y \qquad \mathrm{I}_Y \circ f : X \to Y$$
$$f \circ \mathrm{I}_X = f, \qquad \mathrm{I}_Y \circ f = f.$$

Demostración

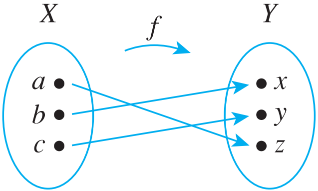
En el tablero.

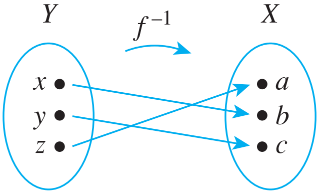
Tema

Composición de una función con su inversa

Ejemplo 7.3.4

Sea $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{x, y, z\}$. Definamos una función $f : X \to Y$ y su inversa $f^{-1} : Y \to X$ por los siguientes diagramas de flechas.





Figuras pág. 420.

Vemos entonces que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y que $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

Composición de una función con su inversa

Teorema 7.3.2

Si $f : X \to Y$ es una correspondencia uno a uno con función inversa $f^{-1} : Y \to X$ entonces

$$f^{-1} \circ f : X \to X \qquad f \circ f^{-1} : Y \to Y$$

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_X, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_Y.$$

Composición de una función con su inversa

Teorema 7.3.2

Si $f : X \to Y$ es una correspondencia uno a uno con función inversa $f^{-1} : Y \to X$ entonces

$$f^{-1} \circ f : X \to X \qquad f \circ f^{-1} : Y \to Y$$

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_X, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_Y.$$

Demostración

En el tablero.

Tema

Composición de funciones inyectivas

Ejemplo

Sea $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{w, x, y, z\}$ y $Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definimos las funciones inyectivas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Vemos que la función compuesta $g \circ f : X \to Z$ también es inyectiva.

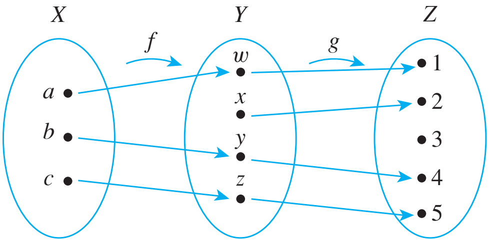


Figura 7.3.1.

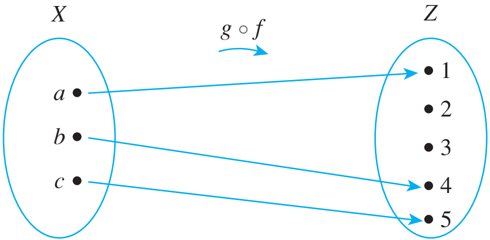


Figura 7.3.2.

Composición de funciones inyectivas

Teorema 7.3.3

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones inyectivas, entonces la función $g \circ f : X \to Z$ también es inyectiva.

Composición de funciones inyectivas

Teorema 7.3.3

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones inyectivas, entonces la función $g \circ f : X \to Z$ también es inyectiva.

Demostración

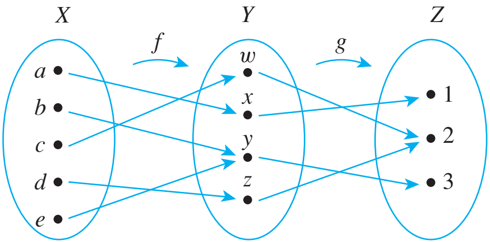
En el tablero.

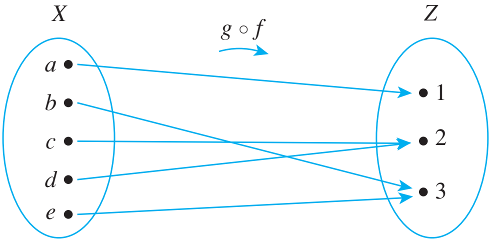
Tema

Composición de funciones sobreyectivas

Ejemplo

Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{w, x, y, z\}$ y $Z = \{1, 2, 3\}$. Definimos las funciones sobrectivas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Vemos que la función compuesta $g \circ f : X \to Z$ también es sobreyectiva.





Figuras pág. 423.

Composición de funciones sobreyectivas

Teorema 7.3.4

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones sobreyectivas, entonces la función $g \circ f : X \to Z$ también es sobreyectiva.

Composición de funciones sobreyectivas

Teorema 7.3.4

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones sobreyectivas, entonces la función $g \circ f : X \to Z$ también es sobreyectiva.

Demostración

En el tablero.

Tema

Función compuesta

Composición con la función identidad

Composición de una función con su inversa

Composición de funciones inyectivas

Composición de funciones sobreyectivas

Referencias

Referencias

Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).