CM0246 Estructuras Discretas
§ 7.4 Cardinalidad con aplicaciones a la computabilidad

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Introducción

Cardinalidad

Conjuntos contables

Conjuntos no contables

La hipótesis del continuo

Aplicaciones

Agradecimientos

Referencias

Tema

Introducción

Cardinalidad

Conjuntos contables

Conjuntos no contables

La hipótesis del continuo

Aplicaciones

Agradecimientos

Referencias

Introducción

Informalmente, los **números cardinales** (*p. ej.* uno, dos, tres, etc.) indican cuantos elementos hay en un conjunto y los **números ordinales** (*p. ej.* primero, segundo, tercero, etc.) indican el orden de un elemento en una sucesión.

Introducción

Pregunta

Supóngase que usted solo saber contar hasta tres. ¿El conjunto de casas y el conjunto de personas en la figura tienen el mismo tamaño?*

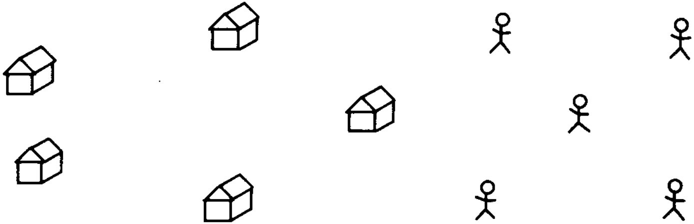


*Figura tomada de [Enderton 1977, Fig. 30].

Introducción

Respuesta

Sí. El conjunto de casas es del mismo tamaño que el conjunto de personas como es indicado por la figura.*

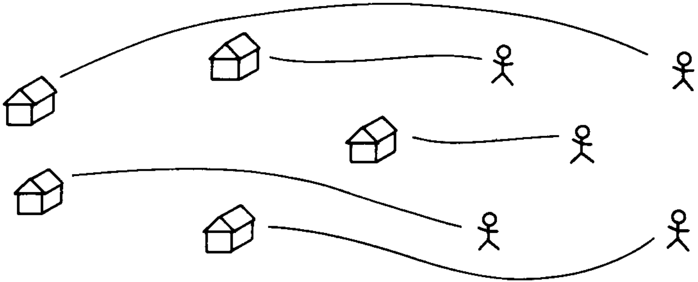


*Figura tomada de [Enderton 1977, Fig. 31].

Introducción

Pregunta

En la pregunta anterior los conjuntos eran finitos. ¿Podemos aplicar un razonamiento similar si los conjuntos son infinitos?

Tema

Introducción

Cardinalidad

Conjuntos contables

Conjuntos no contables

La hipótesis del continuo

Aplicaciones

Agradecimientos

Referencias

Cardinalidad

Definición

Un conjunto es **finito** si es vacío o puede ponerse en correspondencia uno a uno con un conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, para algún $n \in \mathbf{Z}^+$.

Cardinalidad

Definición

Un conjunto es **finito** si es vacío o puede ponerse en correspondencia uno a uno con un conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, para algún $n \in \mathbf{Z}^+$.

Definición

Un conjunto es **infinito** si no es vacío y no puede ponerse en correspondencia uno a uno con un conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, para cualquier $n \in \mathbf{Z}^+$.

Cardinalidad

Definición

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto A **tiene la misma cardinalidad** que el conjunto B, si y solo si, hay una correspondencia uno a uno (correspondencia inyectiva o función biyectiva) de A a B.

Cardinalidad

Definición

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto A **tiene la misma cardinalidad** que el conjunto B, si y solo si, hay una correspondencia uno a uno (correspondencia inyectiva o función biyectiva) de A a B.

Ejemplo

El conjunto de casas y el conjunto de personas en la introducción tienen la misma cardinalidad.

Cardinalidad

Ejemplo

El conjunto de los números enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ y el conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$ tienen la misma cardinalidad porque la función

$$f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{N}$$
$$f(n) = n - 1$$

es una función biyectiva.

Cardinalidad

Teorema 7.4.1

Sean A, B y C conjuntos. Entonces

(i) Propiedad reflexiva de la cardinalidad: A tiene la misma cardinalidad que A.

(ii) Propiedad simétrica de la cardinalidad: si A tiene la misma cardinalidad que B, entonces B tiene la misma cardinalidad que A.

(iii) Propiedad transitiva de la cardinalidad: si A tiene la misma cardinalidad que B y B tiene la misma cardinalidad que C, entonces A tiene la misma cardinalidad que C.

Cardinalidad

Teorema 7.4.1

Sean A, B y C conjuntos. Entonces

(i) Propiedad reflexiva de la cardinalidad: A tiene la misma cardinalidad que A.

(ii) Propiedad simétrica de la cardinalidad: si A tiene la misma cardinalidad que B, entonces B tiene la misma cardinalidad que A.

(iii) Propiedad transitiva de la cardinalidad: si A tiene la misma cardinalidad que B y B tiene la misma cardinalidad que C, entonces A tiene la misma cardinalidad que C.

Demostración

En el tablero.

Cardinalidad

Ejemplo

En el siguiente ejemplo un conjunto tiene la misma cardinalidad que uno de sus subconjuntos propios.

Sea $2\mathbf{Z}$ el conjunto de los enteros pares. La función

$$f : \mathbf{Z} \to 2\mathbf{Z}$$
$$f(n) = 2n$$

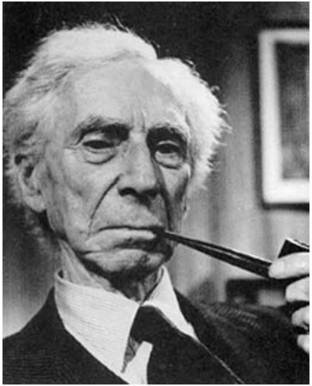
demuestra que los conjuntos $\mathbf{Z}$ y $2\mathbf{Z}$ tienen la misma cardinalidad porque la función es biyectiva.

Cardinalidad

Pregunta

¿Es posible construir un ejemplo similar al anterior empleando conjuntos finitos?

Cardinalidad



Bertrand Russell (1872 – 1970)*

«The possibility that whole and part may have the same number of terms is, it must be confessed, shocking to common-sense.» [Russell 1903, p. 358]

*Imagen tomada del *MacTutor History of Mathematics Archive*.

Cardinalidad

Pregunta

Sean A y B dos conjuntos de la misma cardinalidad. ¿Puede definirse una función de A a B inyectiva pero no sobreyectiva? ¿Sobreyectiva pero no inyectiva?

Tema

Introducción

Cardinalidad

Conjuntos contables

Conjuntos no contables

La hipótesis del continuo

Aplicaciones

Agradecimientos

Referencias

Conjuntos contables

Definición

Sea A un conjunto. El conjunto A es un conjunto **infinito contable** (o **infinito enumerable**), si y solo si, tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números enteros positivos $\mathbf{Z}^+$.

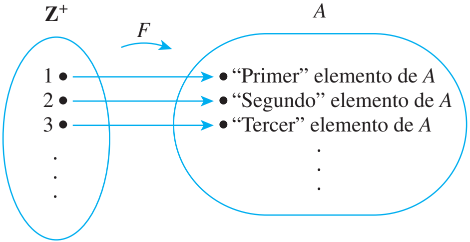


Figura 7.4.1 «Conteo» de un conjunto infinito contable.

Conjuntos contables

Definición

Sea A un conjunto. El conjunto A es un conjunto **contable** (o **enumerable**), si y solo si, es finito o infinito contable.

Conjuntos contables

Definición

Sea A un conjunto. El conjunto A es un conjunto **contable** (o **enumerable**), si y solo si, es finito o infinito contable.

Definición

Un conjunto que no es contable es un conjunto **no contable** (o **no enumerable**).

Conjuntos contables

Ejemplo

Los conjuntos $\mathbf{Z}^+$ y $\mathbf{N}$ son conjuntos infinitos contables.

Conjuntos contables

Observación

Recuerde que una **sucesión infinita** $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ es una función del conjunto de los números enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ a un conjunto A.

Conjuntos contables

Ejemplo

Una secuencia infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de elementos distintos es un conjunto infinito contable.

Conjuntos contables

Ejemplo

El conjunto de los números enteros $\mathbf{Z}$ es infinito contable porque está dado por la secuencia infinita sin repeticiones $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ como lo ilustra la figura.

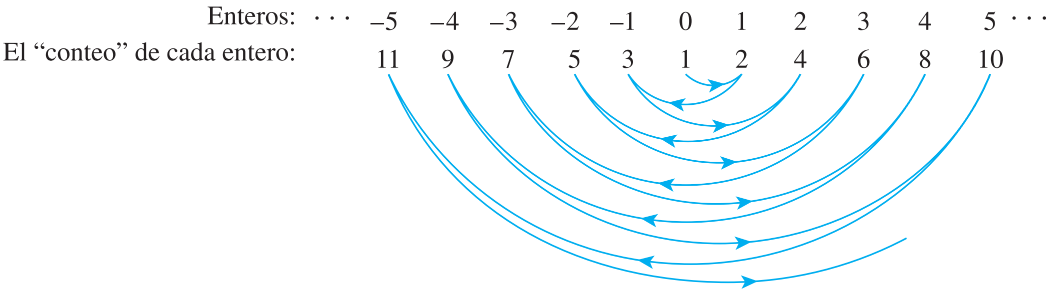


Figura 7.4.2 «Contando» el conjunto de los números enteros $\mathbf{Z}$.

(continua en la próxima diapositiva)

Conjuntos contables

Ejemplo (continuación)

El «conteo» de la figura anterior está dado por la función biyectiva

$$f : \mathbf{Z}^{+} \to \mathbf{Z}$$

$$f = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par;} \\ (1-n)/2, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Conjuntos contables

Ejemplo

El conjunto de los números racionales positivos $\mathbf{Q}^{+}$ es infinito contable porque está dado por la secuencia infinita*

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \dots$$

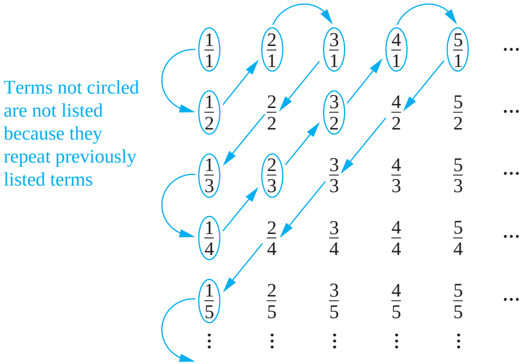


*Figura tomada de [Rosen 2012, pág. 173]. Una enumeración diferente, implementada en Haskell, es presentada en [Gibbons, Lester y Bird 2006].

Conjuntos contables

Ejercicio 7.4.15

El conjunto de todas las cadenas de bits (cadenas de 0 y de 1) es contable.

Ordenamos las cadenas por longitud de menor a mayor y las cadenas de la misma longitud las ordenamos ascendentemente de acuerdo al número en binario que representan, es decir,

$$\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots$$

(continua en la próxima diapositiva)

Conjuntos contables

Ejercicio (continuación)

Correspondencia uno a uno:

$$f : \text{Cadenas de bits} \to \mathbf{Z}^{+}$$
$$f(w) = 1w \text{ (en binario).}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &= 1_b &&= 1, \\ f(0) &= 10_b &&= 2, \\ f(1) &= 11_b &&= 3, \\ f(00) &= 100_b &&= 4, \\ f(01) &= 101_b &&= 5, \\ f(10) &= 110_b &&= 6, \\ f(11) &= 111_b &&= 7. \end{aligned}$$

Tema

Introducción

Cardinalidad

Conjuntos contables

Conjuntos no contables

La hipótesis del continuo

Aplicaciones

Agradecimientos

Referencias

El método de diagonalización de Cantor

Pregunta

¿Existen conjuntos no contables?

El método de diagonalización de Cantor

Pregunta

¿Existen conjuntos no contables?

Teorema 7.4.2

El conjunto de los números reales en el intervalo $(0, 1)$ es no contable.

El método de diagonalización de Cantor

Demostración (diagonalización de Cantor)

Supongamos que el conjunto de los números reales en el intervalo $(0, 1)$ es contable.

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0.d_{11}d_{12}d_{13}\dots d_{1n}\dots \\
r_2 &= 0.d_{21}d_{22}d_{23}\dots d_{2n}\dots \\
r_3 &= 0.d_{31}d_{32}d_{33}\dots d_{3n}\dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

(continua en la próxima diapositiva)

El método de diagonalización de Cantor

Demostración (continuación)

Construyamos un número decimal $r = 0.d_1 d_2 d_3 \ldots \in (0,1)$, donde

$$d_i = \begin{cases} 5, & \text{si } d_{ii} \neq 5; \\ 6, & \text{si } d_{ii} = 5. \end{cases}$$

El método de diagonalización de Cantor

Demostración (continuación)

Construyamos un número decimal $r = 0.d_1 d_2 d_3 \ldots \in (0, 1)$, donde

$$d_i = \begin{cases} 5, & \text{si } d_{ii} \neq 5; \\ 6, & \text{si } d_{ii} = 5. \end{cases}$$

El número r no está en la enumeración anterior porque difiere de cada número en la enésima posición decimal. Por lo tanto, el conjunto de los números reales en el intervalo $(0, 1)$ es no contable. ∎

Conjuntos no contables

Teorema 7.4.3

Cualquier subconjunto de un conjunto contable es contable.

Demostración

En el tablero.

Conjuntos no contables

Teorema 7.4.3

Cualquier subconjunto de un conjunto contable es contable.

Demostración

En el tablero.

Corolario 7.4.4

Cualquier conjunto con un subconjunto no contable es no contable.

Demostración

Contra-positivo del teorema anterior.

Conjuntos no contables

Teorema

El conjunto de los números reales $\mathbf{R}$ es no contable.

Conjuntos no contables

Teorema

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es no contable.

Demostración

El intervalo $(0, 1)$ es un subconjunto no contable de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, por el corolario 7.4.4, el conjunto $\mathbb{R}$ es no contable.

Conjuntos no contables

Ejemplo 7.4.5

El conjunto $\mathbf{R}$ tiene la misma cardinalidad que el intervalo $(0,1)$.

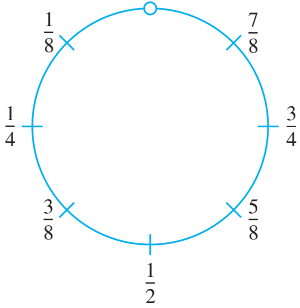


Figura pág. 460.

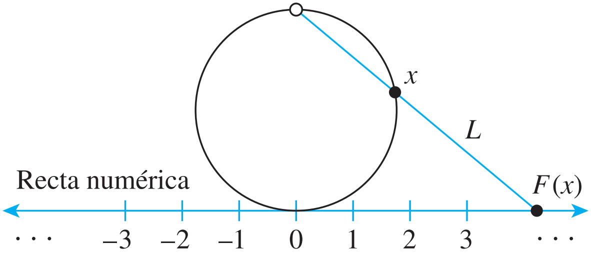


Figura pág. 461.

Sucesión infinita de conjuntos infinitos cada vez más numerosos

Observación

- De acuerdo a los teoremas y ejemplos anteriores, la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es «mayor» a la cardinalidad de $\mathbb{Z}$.

Sucesión infinita de conjuntos infinitos cada vez más numerosos

Observación

- De acuerdo a los teoremas y ejemplos anteriores, la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es «mayor» a la cardinalidad de $\mathbb{Z}$.
- Se puede demostrar que la cardinalidad de cualquier conjunto es «menor» que la cardinalidad de su conjunto potencia.

Sucesión infinita de conjuntos infinitos cada vez más numerosos

Observación

- De acuerdo a los teoremas y ejemplos anteriores, la cardinalidad de $\mathbf{R}$ es «mayor» a la cardinalidad de $\mathbf{Z}$.
- Se puede demostrar que la cardinalidad de cualquier conjunto es «menor» que la cardinalidad de su conjunto potencia.

Ejemplo

Una sucesión infinita de conjuntos infinitos cada vez «mayores» es

$$\mathbf{Z}, \mathcal{P}(\mathbf{Z}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{Z})), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{Z}))), \ldots$$

Tema

Introducción

Cardinalidad

Conjuntos contables

Conjuntos no contables

La hipótesis del continuo

Aplicaciones

Agradecimientos

Referencias

Cardinales finitos y transfinitos

Notation

Los números cardinales finitos se denotan $0, 1, 2, \ldots$

Los números cardinales transfinitos se denotan $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$

Cardinales transfinitos

Notation

Sea A un conjunto. La cardinalidad de A es denotada por $\overline{\overline{A}}$.

Ejemplo

$$\overline{\overline{\mathbf{N}}} = \overline{\overline{\mathbf{Z}^{+}}} = \overline{\overline{\mathbf{Z}}} = \overline{\overline{\mathbf{Q}}} = \aleph_0 \qquad \text{(aleph-cero)},$$

$$\overline{\overline{\mathbf{R}}} = \overline{\overline{(0,1)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbf{N})}} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \qquad \text{(el continuo)}.$$

La hipótesis del continuo

Observación

La hipótesis del continuo establece que no existe un conjunto cuya cardinalidad se encuentre entre la cardinalidad de los números enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ y la cardinalidad de los números reales $\mathbf{R}$, es decir,

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

La hipótesis del continuo

Observación

La hipótesis del continuo establece que no existe un conjunto cuya cardinalidad se encuentre entre la cardinalidad de los números enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ y la cardinalidad de los números reales $\mathbf{R}$, es decir,

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

La hipótesis del continuo (CH) es independiente de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con axioma de elección (ZFC), es decir,

$$\mathrm{ZFC} \nvdash \neg\mathrm{CH} \qquad \text{(Gödel, 1940)}$$

$$\mathrm{ZFC} \nvdash \mathrm{CH} \qquad \text{(Cohen, 1964)}$$

Tema

Introducción

Cardinalidad

Conjuntos contables

Conjuntos no contables

La hipótesis del continuo

Aplicaciones

Agradecimientos

Referencias

Aplicaciones: cardinalidad y computabilidad

Ejemplo 7.4.6

Demostrar que el conjunto de todos los programas en un lenguaje de programación determinado es contable.

Aplicaciones: cardinalidad y computabilidad

Ejemplo 7.4.6

Demostrar que el conjunto de todos los programas en un lenguaje de programación determinado es contable.

Demostración

Cualquier programa en cualquier lenguaje de programación es una cadena finita sobre el alfabeto finito del lenguaje.

Sea P el conjunto de los programas en un lenguaje de programación.

(i) Caso: P es finito

P es contable por definición de conjunto contable.

Aplicaciones: cardinalidad y computabilidad

Demostración (continuación)

(ii) Caso: P es infinito

Codificar los programas en 0 y 1, ordenar los programas/cadenas por longitud de menor a mayor y ordenar las programas/cadenas de la misma longitud por el número que representan.

Definimos la función

$$F : \mathbf{Z}^{+} \to P$$
$$F(n) = \text{enésimo programa de acuerdo al orden anterior}.$$

La función F es una correspondencia uno a uno y por lo tanto el conjunto P es infinito contable.

■

Aplicaciones: cardinalidad y computabilidad

Ejemplo 7.4.7.a

Demostrar que el conjunto de las funciones de los enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ al conjunto de los dígitos es no contable, es decir, sea

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \text{y} \quad T = \{\, f \subseteq \mathbf{Z}^+ \times D \mid f : \mathbf{Z}^+ \to D \,\},$$

demostrar que T es no contable.

Aplicaciones: cardinalidad y computabilidad

Ejemplo 7.4.7.a

Demostrar que el conjunto de las funciones de los enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ al conjunto de los dígitos es no contable, es decir, sea

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \text{y} \quad T = \{\, f \subseteq \mathbf{Z}^+ \times D \mid f : \mathbf{Z}^+ \to D \,\},$$

demostrar que T es no contable.

Demostración

Sea el conjunto $A \subseteq T$ definido por

$$G : (0, 1) \to A$$
$$G(0.a_1 a_2 \ldots a_n \ldots) = \text{la función que envía cada entero positivo } n \text{ a } a_n.$$

La función G es una correspondencia uno a uno y por lo tanto el conjunto A es no contable. Como $A \subseteq T$ entonces el conjunto T es no contable. ■

Aplicaciones: cardinalidad y computabilidad

Ejemplo 7.4.7.b

Demostrar que hay funciones no computables.

Aplicaciones: cardinalidad y computabilidad

Ejemplo 7.4.7.b

Demostrar que hay funciones no computables.

Demostración

El conjunto de los programas en cualquier lenguaje de programación es contable (finito o infinito) y el conjunto de la funciones de los enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ al conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ es no contable.

Por lo tanto, hay más funciones de los enteros positivos $\mathbf{Z}^+$ al conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que programas y entonces existen funciones que no son computables. $\blacksquare$

Tema

Introducción

Cardinalidad

Conjuntos contables

Conjuntos no contables

La hipótesis del continuo

Aplicaciones

Agradecimientos

Referencias

Agradecimientos

Agradezco a mi colega René Alejandro Londoño Cano por señalarme algunas correcciones a una versión anterior de estas diapositivas.

Tema

Introducción

Cardinalidad

Conjuntos contables

Conjuntos no contables

La hipótesis del continuo

Aplicaciones

Agradecimientos

Referencias

Referencias

- Enderton, Herbert B. (1977). Elements of Set Theory. Academic Press (vid. págs. 6, 7).
- Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).
- Gibbons, Jeremy, Lester, David y Bird, Richard (2006). Functional Pearl. Enumerating the Rationals. Journal of Functional Programming 16.3, págs. 281-296. DOI: 10.1017/S0956796806005880 (vid. pág. 30).
- Rosen, Kenneth H. [1988] (2012). Discrete Mathematics and Its Applications. 7.ª ed. McGraw-Hill (vid. pág. 30).
- Russell, Bertrand (1903). The Principles of Mathematics. Cambridge University Press (vid. pág. 19).