CM0246 Estructuras Discretas
§ 6.4 Álgebras booleanas y la paradoja de Rusell

Andrés Sicard Ramírez

Universidad EAFIT

Semestre 2023-2

Preliminares

Convención

Los números asignados a los teoremas, ejemplos, ejercicios, figuras y páginas en estas diapositivas corresponden a los números asignados en el texto guía [Epp 2011].

Esquema de la presentación

Tema

Álgebras booleanas

George Boole (1815 – 1864)
(imagen tomada de MacTutor)

Álgebras booleanas

Equivalencias lógicas e identidades entre conjuntos

Equivalencias lógicas	Identidades entre conjuntos
$p \vee q \equiv q \vee p$	$A \cup B = B \cup A$
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$A \cap B = B \cap A$
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Equivalencias lógicas e identidades entre conjuntos (continuación)

Equivalencias lógicas	Identidades entre conjuntos
$p \wedge \mathbf{t} \equiv p$	$A \cap \mathbb{U} = A$
$p \vee \mathbf{c} \equiv p$	$A \cup \emptyset = A$
$p \vee \sim p \equiv \mathbf{t}$	$A \cup A^{\mathrm{c}} = \mathbb{U}$
$p \wedge \sim p \equiv \mathbf{c}$	$A \cap A^{\mathrm{c}} = \emptyset$
$\sim(\sim p) \equiv p$	$(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = A$

Álgebras booleanas

Equivalencias lógicas e identidades entre conjuntos (continuación)

Equivalencias lógicas	Identidades entre conjuntos
$p \vee p \equiv p$	$A \cup A = A$
$p \wedge p \equiv p$	$A \cap A = A$
$p \vee \mathbf{t} \equiv \mathbf{t}$	$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$
$p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$
$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$

Álgebras booleanas

Equivalencias lógicas e identidades entre conjuntos (continuación)

Equivalencias lógicas	Identidades entre conjuntos
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$A \cup (A \cap B) = A$
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$A \cap (A \cup B) = A$
$\sim\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$	$\mathbb{U}^{\mathrm{c}} = \emptyset$
$\sim\mathbf{c} \equiv \mathbf{t}$	$\emptyset^{\mathrm{c}} = \mathbb{U}$

Álgebras booleanas

Correspondencia

Teoría de conjuntos	Lógica proposicional
$\cup$	$\vee$
$\cap$	$\wedge$
${}^{\mathrm{c}}$	$\sim$
$\emptyset$	$\mathbf{c}$
$\mathbb{U}$	$\mathbf{t}$

Álgebras booleanas

Definición

Un **álgebra booleana** es un conjunto B junto con dos operaciones binarias, denotadas $+$ y $\cdot$, que satisfacen las siguientes propiedades:

- Leyes conmutativas
  (i) $a + b = b + a$
  (ii) $a \cdot b = b \cdot a$
- Leyes asociativas
  (i) $(a + b) + c = a + (b + c)$
  (ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Leyes distributivas
  (i) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
  (ii) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- Leyes de identidad
  Existen elementos distintos 0 y 1 en B tales que
  (i) $a + 0 = a$
  (ii) $a \cdot 1 = a$
- Leyes de complemento
  Para cada a en B, existe el **complemento** o **negación** de a, denotado $\overline{a}$, tal que
  (i) $a + \overline{a} = 1$
  (ii) $a \cdot \overline{a} = 0$

Álgebras booleanas

Observación

Un álgebra booleana es definida como una estructura algebraica $(B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$ donde B es un conjunto no vacío, los símbolos $+$ y $\cdot$ son dos operaciones binarias, el símbolo $^{-}$ es una operación unaria y 0 y 1 son dos contantes, que satisface las propiedades enunciadas en la definición anterior.

Álgebras booleanas

Ejemplo

Un álgebra booleana de dos elementos es definida por

$$(\{0,1\},+,\cdot,\neg,0,1)$$

donde

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} \neg & \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}.$$

Álgebras booleanas

Ejemplo

Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universal cerrado bajo unión, intersección y complemento. Las álgebras booleanas para la teoría de conjuntos y la lógica proposicional están definidas por:

Álgebra booleana	Teoría de conjuntos	Lógica proposicional
B	$\mathbb{U}$	conjunto de formulas
$+$	$\cup$	$\vee$
$\cdot$	$\cap$	$\wedge$
$^{-}$	^{c}	$\sim$
0	$\emptyset$	$\mathbf{c}$
1	$\mathbb{U}$	$\mathbf{t}$

Álgebras booleanas

Observación

En un álgebra booleana los elementos 0 y 1 son únicos, el complemento de cada elemento es único y se satisfacen identidades análogas al Teorema 6.2.2.

Álgebras booleanas

Observación

En un álgebra booleana los elementos 0 y 1 son únicos, el complemento de cada elemento es único y se satisfacen identidades análogas al Teorema 6.2.2.

Convención

Cuando decimos «sea B un álgebra booleana» lo que estamos diciendo de manera abreviada es «sea $(B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$ un álgebra booleana».

Álgebras booleanas

Ejemplo

Sea B una álgebra booleana y sea $a \in B$. Demostrar que B satisface la leyes de idempotencia $a + a = a$ y $a \cdot a = a$.

Álgebras booleanas

Ejemplo

Sea B una álgebra booleana y sea $a \in B$. Demostrar que B satisface la leyes de idempotencia $a + a = a$ y $a \cdot a = a$.

Demostración

$$
\begin{aligned}
\underline{a + a} &= (a + a) \cdot \underline{1} && \text{(ley de identidad)} \\
&= \underline{(a + a) \cdot (a + \bar{a})} && \text{(ley de complemento)} \\
&= a + (\underline{a \cdot \bar{a}}) && \text{(ley distributiva)} \\
&= \underline{a + 0} && \text{(ley de complemento)} \\
&= a && \text{(ley de identidad)}
\end{aligned}
$$

Álgebras booleanas

Ejemplo

Sea B una álgebra booleana y sea $a \in B$. Demostrar que B satisface la leyes de idempotencia $a + a = a$ y $a \cdot a = a$.

Demostración

$$
\begin{aligned}
\underline{a + a} &= (a + a) \cdot \underline{1} && \text{(ley de identidad)} \\
&= \underline{(a + a) \cdot (a + \bar{a})} && \text{(ley de complemento)} \\
&= a + (\underline{a \cdot \bar{a}}) && \text{(ley distributiva)} \\
&= \underline{a + 0} && \text{(ley de complemento)} \\
&= a && \text{(ley de identidad)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{a \cdot a} &= (a \cdot a) + \underline{0} \\
&= \underline{(a \cdot a) + (a \cdot \bar{a})} \\
&= a \cdot (\underline{a + \bar{a}}) \\
&= \underline{a \cdot 1} \\
&= a
\end{aligned}
$$

Álgebras booleanas

Definición

El **doble** de cualquier enunciado en un álgebra booleana es el enunciado que se obtiene al intercambiar $+$ y $\cdot$, e intercambiar 0 y 1.

Álgebras booleanas

Definición

El **doble** de cualquier enunciado en un álgebra booleana es el enunciado que se obtiene al intercambiar $+$ y $\cdot$, e intercambiar 0 y 1.

Ejemplo

El doble de $a \cdot (b + 0)$ es $a + (b \cdot 1)$.

Álgebras booleanas

Teorema (principio de dualidad)

El doble de cualquier teorema en un álgebra booleana también es un teorema.

Álgebras booleanas

Teorema (principio de dualidad)

El doble de cualquier teorema en un álgebra booleana también es un teorema.

Ejemplo

Sea B una álgebra booleana y sea $a \in B$. Desde que las leyes de idempotencia

$$\begin{aligned} a + a &= a, \\ a \cdot a &= a, \end{aligned}$$

son enunciados duales, es suficiente demostrar una de ellas para obtener la otra por el principio de dualidad.

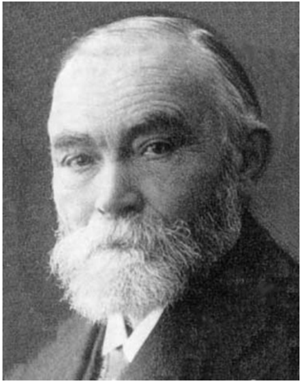
Tema

Álgebras booleanas

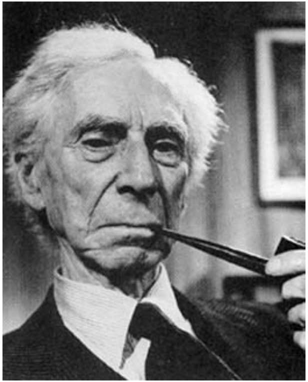
La paradoja de Russell

Referencias

La paradoja de Russell



Gottlob Frege (1848 – 1925)
(imagen de Wikipedia)



Bertrand Russell (1872 – 1970)
(imagen de Wikipedia)

La paradoja de Russell

Introducción

Sea S el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, es decir,

$$S = \{\, A \mid A \text{ es un conjunto y } A \notin A \,\}.$$

La paradoja de Russell

Introducción

Sea S el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, es decir,

$$S = \{ A \mid A \text{ es un conjunto y } A \notin A \}.$$

Pregunta

¿Es S un conjunto no vacío?

La paradoja de Russell

Introducción

Sea S el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, es decir,

$$S = \{\, A \mid A \text{ es un conjunto y } A \notin A \,\}.$$

Pregunta

¿Es S un conjunto no vacío? ¡No!

La paradoja de Russell

Introducción

Sea S el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, es decir,

$$S = \{\, A \mid A \text{ es un conjunto y } A \notin A \,\}.$$

Pregunta

¿Es S un conjunto no vacío? ¡No!

Pregunta

¿Es S un elemento de sí mismo?

La paradoja de Russell

Introducción

Sea S el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, es decir,

$$S = \{\, A \mid A \text{ es un conjunto y } A \notin A \,\}.$$

Pregunta

¿Es S un conjunto no vacío? ¡No!

Pregunta

¿Es S un elemento de sí mismo?

Respuesta

Puesto que $S \in S \rightarrow S \notin S$ y $S \notin S \rightarrow S \in S$ (¿por qué?) entonces ni $S \in S$ ni $S \notin S$ (contradicción).

La paradoja de Russell

Solución

«Cada vez que se defina un conjunto usando un predicado como una propiedad de definición, también debe ponerse como condición que el conjunto es un subconjunto de un conjunto conocido.» (pág. 379)

La paradoja de Russell

Solución

«Cada vez que se defina un conjunto usando un predicado como una propiedad de definición, también debe ponerse como condición que el conjunto es un subconjunto de un conjunto conocido.» (pág. 379)

Es decir, en general para definir un conjunto S empleando un predicado P:

$$S = \{\, A \mid P(A) \,\}, \qquad \text{(incorrecto)}$$

$$S = \{\, A \mid A \subseteq B \text{ y } P(A) \,\}, \qquad \text{(correcto)}$$

donde B es un conjunto previamente definido.

La paradoja de Russell

Ejemplo

Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universo y sean todos los conjuntos bajo análisis subconjuntos de $\mathbb{U}$, entonces el «conjunto»

$$S = \{\, A \mid A \subseteq \mathbb{U} \text{ y } A \notin A \,\}$$

no se puede definir porque:

La paradoja de Russell

Ejemplo

Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universo y sean todos los conjuntos bajo análisis subconjuntos de $\mathbb{U}$, entonces el «conjunto»

$$S = \{ A \mid A \subseteq \mathbb{U} \text{ y } A \notin A \}$$

no se puede definir porque:

$$\begin{aligned}\text{(i) } S \in S &\rightarrow S \subseteq \mathbb{U} \wedge S \notin S \\ &\rightarrow S \notin S \text{ (contradicción)}\end{aligned}$$

La paradoja de Russell

Ejemplo

Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universo y sean todos los conjuntos bajo análisis subconjuntos de $\mathbb{U}$, entonces el «conjunto»

$$S = \{\, A \mid A \subseteq \mathbb{U} \text{ y } A \notin A \,\}$$

no se puede definir porque:

(i) $S \in S \rightarrow S \subseteq \mathbb{U} \wedge S \notin S$
$\rightarrow S \notin S$ (contradicción)

(ii) $S \notin S \rightarrow \neg(S \subseteq \mathbb{U} \wedge S \notin S)$
$\rightarrow S \nsubseteq \mathbb{U} \vee S \in S$
$\rightarrow S \nsubseteq \mathbb{U}$ (no es un conjunto)

Carta de Russell a van Heijenoort*

Penrhyndeudraeth, 23 November 1962
Dear Professor van Heijenoort,

As I think about acts of integrity and grace, I realise there is nothing in my knowledge to compare with Frege's dedication to truth. His entire life's work was on the verge of completion, much of his work had been ignored to the benefit of men infinitely less capable, his second volume was about to be published, and upon finding that his fundamental assumption was in error, he responded with intellectual pleasure clearly submerging any feelings of personal disappointment. It was almost superhuman and a telling indication of that of which men are capable if their dedication is to creative work and knowledge instead of cruder efforts to dominate and be known.

Yours sincerely
Bertrand Russell

*van Heijenoort [1967, pág. 127].

Carta de Russell a van Heijenoort*

Cuando pienso en actos de gracia e integridad, me doy cuenta de que no conozco ninguno comparable con la dedicación de Frege a la verdad. Estaba Frege dando cima a la obra de toda su vida, la mayor parte de su trabajo había sido ignorado en beneficio de hombres infinitamente menos competentes que él, su segundo volumen estaba a punto de ser publicado y, al darse cuenta de que su supuesto fundamental era erróneo, reaccionó con placer intelectual, reprimiendo todo sentimiento de decepción personal. Era algo casi sobrehumano y un índice de aquello de lo que los hombres son capaces cuando están dedicados al trabajo creador y al conocimiento, y no al crudo afán por dominar y hacerse famosos.

*La carta fue escrita en 1962. La versión original en inglés está en [van Heijenoort 1967, pág. 127]. La versión en español está en [Frege 1973, págs. 8–9]. La carta fue traducida por Jesús Mosterín.

Tema

Referencias

- Epp, Susanna S. [1990] (2011). Matemáticas Discretas con Aplicaciones. 4.ª ed. Traducido por Ana Elizabeth García Hernández. Cengage Learning (vid. pág. 2).
- Frege, Gottlob [1971] (1973). Estudios sobre Semántica. Trad. por Moulines, Ulises. 2.ª ed. Vol. 60. Ariel quincenal. Editorial Ariel, S.A. (vid. pág. 37).
- van Heijenoort, Jean, ed. (1967). From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Source Books in the History of the Sciences. Harvard University Press (vid. págs. 36, 37).