

# Análisis e Implementación de Modelos y Métodos de Solución para Problemas de Optimización Combinatoria Bajo Incertidumbre

*Francisco González*  
Ingeniería Matemática, Universidad EAFIT

*Juan Carlos Rivera*  
Escuela de Ciencias, Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad EAFIT

## Planteamiento del problema

El problema de investigación que se aborda en este proyecto es un problema de optimización combinatoria, el cual tiene múltiples aplicaciones industriales. Dicho problema puede ser descrito matemáticamente de la siguiente forma:

Se tiene un conjunto  $J = \{0, 1, 2, \dots, n, n + 1\}$  de  $n + 2$  actividades y un conjunto  $R = \{1, 2, \dots, m\}$  de  $m$  recursos. Cada actividad  $j \in J$  debe ser asignada a un recurso de manera que todas las actividades sean realizadas por un solo recurso, los recursos no procesan más de una actividad simultáneamente y se optimiza una función objetivo determinada. Las actividades 0 y  $n + 1$  son actividades ficticias que indican el inicio y el fin del procesamiento de las actividades.

Adicionalmente, cada actividad  $j \in J$  está caracterizada por su tiempo de procesamiento,  $s_{ij}$  y  $p_j$ , donde  $s_{ij}$  representa el tiempo de procesamiento dependiente de la actividad  $i \in J$  procesada por el mismo recurso justo antes que la actividad  $j$  y  $p_j$  representa el tiempo de procesamiento independiente de la actividad. Todos los valores  $p_j$  y  $s_{ij}$  se asumen reales y no negativos.

El problema consiste entonces en encontrar un orden (o tiempos de inicio) de procesamiento de todas las actividades de forma que se minimice o maximice una función objetivo. Las funciones objetivo más comunes de este problema son: la minimización del tiempo de terminación de todas las actividades (o tiempo de terminación de la última actividad), la minimización de la suma de los tiempos de inicio (o de terminación) de todas las actividades y la sumatoria de los tiempos de procesamiento.

Algunas variaciones incluyen para cada actividad  $j \in J$ , entre otras, la asignación de pesos  $w_j$ , tiempos límite de terminación o entrega  $d_j$ , tiempos de liberación  $r_j$ , y para cada recurso  $m \in R$  capacidades de procesamiento  $Q_m$  y ventanas de tiempo  $[l_m, u_m]$ , entre otras.

A continuación se usará la minimización de la suma ponderada de los tiempos de finalización como función objetivo, aunque la misma podrá cambiar durante la ejecución del proyecto, así

como se considerarán otras variaciones al problema dependiendo de las posibles aplicaciones consideradas.

Este problema puede ser modelado matemáticamente por el siguiente programa lineal entero mixto:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n t_i \cdot w_i \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \setminus \{0, n+1\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in J \setminus \{0, n+1\} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j} = m \quad (4)$$

$$t_j \geq t_i + s_{ij} + p_j - T \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in J \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in J \quad (6)$$

$$t_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (7)$$

donde las variables de decisión binarias  $x_{ij}$  indican si la actividad  $i$  es ejecutada inmediatamente después de la actividad  $j$  ( $x_{ij} = 1$ ) o no ( $x_{ij} = 0$ ), y las variables de decisión  $t_j$  indican el tiempo de finalización de la actividad  $j$ . La ecuación (1) representa la función a minimizar, la suma ponderada de los tiempos de finalización. Las ecuaciones (2) y (3) indican que cada actividad debe ejecutarse solo una vez, y cada actividad sucede (ecuación (2)) y precede (ecuación (3)) a exactamente una actividad. La ecuación (4) limita el número de recursos disponibles y las ecuaciones (5) los tiempos de finalización de cada actividad. Finalmente, las ecuaciones (6) y (7) definen el dominio de las variables de decisión.

## Objetivo general

Abordar los problemas optimización de rutas de vehículos y programación de máquinas en paralelo desde una perspectiva unificada, proponer métodos de solución y estudiar el impacto de la estocasticidad en dichos problemas.

## Objetivos específicos

- Diseñar e implementar algoritmos metaheurísticos para resolver el problema de optimización combinatoria planteado o alguna(s) de sus variantes.
- Evaluar y comparar el desempeño de los modelos de optimización planteados al aplicarlo en los problemas del ruteo de vehículo y programación de maquinas.
- Diseñar e implementar un mecanismo de simulación de escenarios para evaluar el impacto de la estocasticidad en la solución de los problemas.
- Diseñar métodos o modelos alternativos para disminuir el impacto de la estocasticidad en la solución.
- Redactar un informe/artículo con la descripción de los algoritmos, experimentos y resultados.

## Antecedentes

Aunque la definición del problema matemático planteado es bastante simple, este problema es de gran interés tanto científico como práctico. Su interés científico radica en que es un problema de optimización combinatoria perteneciente a la clase NP-hard (Garey y Johnson, 1978), por lo que no se conocen algoritmos exactos que lo resuelvan en tiempo polinomial. Usualmente este tipo de problemas se resuelven mediante métodos heurísticos y metaheurísticos, tales como métodos constructivos, algoritmos genéticos, búsqueda tabú, recocido simulado, métodos híbridos, entre otros. Durante este proyecto se evaluarán diferentes alternativas de solución considerando los métodos anteriormente citados.

Por otro lado, su gran cantidad de aplicaciones le proporciona un gran interés práctico. Sus principales aplicaciones se pueden clasificar en dos grandes grupos: programación de producción y ruteo de vehículos.

En programación de producción (o scheduling), es muy conocido el problema de máquinas en paralelo o parallel machine scheduling problem (Unlu y Mason, 2010), donde cada recurso corresponde a una máquina y las diferentes actividades deben ser ejecutadas en una de ellas. El caso más estudiado en la literatura presenta tiempos de procesamiento constantes ( $s_{ij} = 0 \forall i, j \in J$ ) y mientras que las funciones objetivo más tratadas son la minimización del tiempo de finalización de la última actividades o finalización de la producción (makespan) y la minimización de la suma de los tiempos de finalización o minimización del flujo total, relacionada con la minimización de inventarios en proceso. Otras variantes del problema incluyen la ponderación de las actividades, el procesamiento en paralelo de varias actividades en la misma

máquina, la asignación de operarios de acuerdo a sus disponibilidades y habilidades, y manejo de incertidumbre. Revisiones del estado del arte en este tipo de aplicaciones pueden ser encontradas en Chen et al. (1998) y Schmidt (2000).

En ruteo de vehículos, los recursos corresponden a vehículos y las actividades son ciudades a visitar. La función objetivo propuesta es menos común. Sin embargo, algunas aplicaciones se han desarrollado en mantenimiento y producción de servicios (Jothi y Raghavachari, 2004) donde se privilegia la satisfacción de los clientes y su tiempo de espera, logística humanitaria (Rivera et al., 2013) donde un oportuno tiempo de respuesta aumenta la tasa de supervivencia, logística verde (Kara et al., 2008) donde se privilegian rutas de distribución con menor impacto para el medio ambiente en términos de emisiones de CO<sub>2</sub>. Algunas variantes del problema incluyen, depósito y recolección de bienes (pick-up and delivery), la posibilidad de múltiples visitas (split delivery), múltiples rutas (multitrip), manejo de incertidumbre, entre otras. Una revisión del estado del arte de problemas de ruteo de vehículos con funciones objetivo relacionadas con el tiempo o funciones objetivo acumulativas puede ser encontrada en Rivera (2014).

En este proyecto se plantea evaluar diferentes estrategias de solución mediante algoritmos heurísticos, metaheurísticos e híbridos, y la solución de variaciones estocásticas del problema. A modo de ejemplo, versiones estocásticas del problema pueden considerar variaciones en los tiempos de procesamiento  $s_{ij}$  o  $p_j$ , variaciones en la disponibilidad de los recursos o la llegada de nuevas actividades a procesar. Las variaciones a estudiar se definirán durante el transcurso del desarrollo del proyecto. Algunas versiones estocásticas de los problemas planteados han sido propuestas por Euchí et al. (2015) y Kasperski et al. (2012).

## **Justificación**

Los problemas de optimización combinatoria, tales como programación de máquinas y distribución de bienes, tienen un gran número de aplicaciones en la industria. Dichos problemas suelen ser planteados utilizando modelos de programación lineal entera y programación dinámica, sin embargo, debido a su complejidad y al tamaño de los problemas reales, éstos se resuelven usualmente mediante métodos heurísticos y metaheurísticos.

El problema de optimización planteado puede ser visto como una generalización e integración de varios problemas de programación de producción y de logística, el cual permite el desarrollo de métodos de solución robustos para una amplia variedad de aplicaciones como las descritas anteriormente.

Por otro lado, los métodos que se desarrollarán podrían permitir una demarcación de las estrategias exitosas de acuerdo a cada tipo de instancia considerada, las cuales dependen de las hipótesis acerca de los datos utilizados (distribuciones de los tiempos de procesamiento, relación entre los tiempos de procesamiento, cantidad de recursos disponibles, etc.).

Los problemas y aplicaciones planteadas así como los métodos propuestos hacen parte del estado del arte más reciente en el área de investigación de operaciones y matemáticas aplicadas.

## **Alcance**

En este proyecto se diseñarán e implementarán algoritmos metaheurísticos para resolver un problema general de optimización combinatoria descrito anteriormente o alguna de sus variantes. Para tal fin, se utilizarán datos públicos disponibles en internet en librerías, las cuales permitirán analizar los resultados con diferentes variaciones o instancias del problema y comparar los resultados con los presentados en la literatura científica.

Como producto final de este proyecto se obtendrá un algoritmo codificado en un lenguaje de programación comercial (c++, matlab u otro), el cuál será descrito junto con los resultados y su análisis en un artículo con finalidad de ser publicado.

## **Metodología propuesta**

El proyecto se realizará en cuatro grandes fases. La primera fase consiste en la revisión del estado del arte, la cual permitirá la apropiación de los diferentes métodos y estrategias de solución, y la identificación de posibles aportes producto de esta investigación.

La segunda fase consiste en el planteamiento de modelos. En esta fase se seleccionarán los problemas a considerar para ser resueltos y se plantearán diferentes alternativas para modelarlos. En esta fase se deben considerar tanto los problemas determinísticos como los estocásticos.

En la tercera fase se desarrollarán los algoritmos de solución para los problemas seleccionados en la fase anterior. En esta fase se realizarán también los experimentos con diferentes instancias de prueba para la comparación de resultados.

La última fase consiste en la redacción de un informe o artículo con la descripción de los métodos desarrollados así como la descripción de los resultados obtenidos y su respectivo análisis.

Durante el desarrollo del proyecto se realizarán reuniones semanales con el tutor del proyecto. Las reuniones consistirán en discusiones y observaciones del progreso que se ha tenido en el proyecto, así como estructuración y guía del trabajo para la continuación del mismo.

Asimismo, se tienen planeadas reuniones esporádicas con otros integrantes del grupo de investigación.

## **Cronograma de actividades**

En la siguiente tabla se resumen las diferentes actividades generales del proyecto así como el intervalo de tiempo estimado en el cual se esperan desarrollar. En la primera columna se

encuentra el periodo del semestre académico en el cual se realizará cada fase, mientras que en la segunda columna se presenta la fase respectiva.

Semana 3	Redacción del anteproyecto
Semanas 4 a 6	Revisión del estado del arte
Semana 7	Planteamiento de modelos
Semana 8 a 13	Programación de métodos de solución
Semana 14 a 19	Escritura del informe/artículo

Como se mencionó anteriormente, los periodos presentados en la tabla anterior son estimaciones, las cuales pueden variar dependiendo del avance del proyecto y de los resultados obtenidos en las primeras etapas. Adicionalmente, algunas fases pueden requerir ser ejecutadas en paralelo.

### **Presupuesto**

Este proyecto no cuenta con financiación ni asignación presupuestal por parte de la Universidad EAFIT. Sin embargo, durante su ejecución se hará uso de las instalaciones e infraestructura de la Universidad, tales como salas de cómputo, software, oficinas, acceso a bases de datos de revistas científicas, internet, entre otras.

### **Propiedad intelectual**

Debido a la relación de los autores con la Universidad EAFIT, los desarrollos realizados durante la ejecución del proyecto estarán sujetos al reglamento de propiedad intelectual de la Universidad.

### **Bibliografía**

CHEN, Bo, POTTS, Chris N., y WOEGINGER, Gerhard J. 1998. "A review of Machine scheduling: complexity, algorithms and approximability". Handbook of combinatorial optimization. Kluwer Academic Publishers.

EUCHI, Jalel, YASSINE, Adnan y CHABCHOUB, Habib. 2015. "The dynamic vehicle routing problem: Solution with hybrid metaheuristic approach". Swarm and Evolutionary Computation (in press).

GAREY, M.R. y JOHNSON, D.S. 1978. "Strong NP-completeness results: motivation, examples and implications". Journal of the Association for Computing Machinery 25. 499-508.

JOTHI, Raja y RAGHAVACHARI, Balaji. 2004. "Minimum Latency Tours and the k-Traveling Repairmen Problem". Lecture Notes in Computer Science, vol. 2976, 423-433.

KARA, Imdat; KARA, Bahar Yetisy y YETIS, M. Kadri. 2008. "Cumulative vehicle routing problems". Vehicle routing problem. 85-98.

KASPERSKI, Adam, KURPISZ, Adam, and ZIELINSKI, Pawel. 2012. "Parallel Machine Scheduling under Uncertainty". Springer-Verlag. 74-83.

RIVERA, Juan Carlos; AFSAR, Murat H. y PRINS, Christian. 2013. "A Multi-Start Iterated Local Search for the Multitrip Cumulative Capacitated Vehicle Routing Problem". Technical report. UTT-LOSI-13001. Troyes University of Technology.

RIVERA, Juan Carlos. 2014. "Logistic optimization in disaster response operations". Doctoral dissertation. Troyes University of Technology.

SCHMIDT, Günter. 2000. "Scheduling with limited machine availability". European Journal of Operational Research 121, 1-15.

UNLU, Yasin y MASON, Scott J. 2010. "Evaluation of mixed integer programming formulations for non-preemptive parallel machine scheduling problems". Computers & Industrial Engineering 58, 785–800.